Exercice 5

Si une variable aléatoire X suit une loi exponentielle de paramètre λ, on appelle demi-vie de X le réel τ tel que :

$$P(0 \leqslant X \leqslant \tau) = P(X \geqslant \tau)$$

Partie A :

1. Démontrer que $\tau = \dfrac{\ln 2}{\lambda}$
2. Comparer la demi-vie avec l'espérance de la variable aléatoire X

Partie B : Application

Un fabricant a commercialisé un lot très important d'oscilloscopes identiques, dont la durée de vie en années est une variable aléatoire X suivant une loi exponentielle de paramètre λ avec $\lambda > 0$.

On sait que le seuil de 50 % d'oscilloscopes encore en fonctionnement a été atteint après 5 années et demi d'utilisation.

1. Déterminer une valeur approchée, à 10^{-3} près, du paramètre λ.

   En déduire la durée de vie moyenne d'un oscilloscope au mois près.

2. Sachant qu'un oscilloscope a fonctionné 8 années, quelle est la probabilité que sa durée de vie dépasse 10 ans ?

Exercice 6 **Modéliser une situation avec une loi uniforme, ou avec une loi exponentielle.**

La durée de vie d'un téléviseur avant la première panne, exprimée en années, peut être modélisée par une variable aléatoire X suivant une loi à densité, qui reste à préciser.

D'après une étude statistique du constructeur, la probabilité que le téléviseur tombe en panne avant la fin de la première année est 0,16.

Partie A : On suppose que la durée de vie sans panne d'un téléviseur ne peut excéder un certain temps T (en années), et on envisage le choix pour la variable aléatoire X d'une loi uniforme sur $[0\,;T]$.

1. Quelle devrait être la valeur du réel positif T pour que soit satisfaite l'hypothèse $P(X < 1) = 0,16$?
2. Calculer dans ce cas, la probabilité que le téléviseur n'ait aucune panne durant les 3 premières années.
3. Calculer la durée moyenne qu'a un téléviseur dans ce cas là.

Partie B : Jugeant le modèle peu réaliste, on fait désormais le choix pour X d'une loi sans vieillissement, c'est-à-dire d'une loi exponentielle définie sur $[0\,;+\infty[$, de paramètre λ où λ est un réel strictement positif.

1. Calculer, en fonction de λ, la probabilité $P(X < t)$ pour $t \geqslant 0$; en déduire la valeur exacte de λ.

   Dans la suite de l'exercice, on prendra $\lambda = 0,175$

2. Déterminer une valeur approchée, arrondie à 10^{-3} près, de la probabilité que le téléviseur ne connaisse pas de panne au cours des 3 premières années.
3. Sachant que ce téléviseur n'a connu aucune panne au cours des 3 premières années où il était sous garantie, quelle est la probabilité qu'il ne connaisse aucune panne au cours des 5 premières années ?
4. Calculer et donner les résultats seront arrondis au mois près.

   a. la durée de vie moyenne sans panne du téléviseur,

   b. la durée de vie médiane sans panne du téléviseur.