Fonction carré :

$\boxed{f(x) = x^2}$ sur $\mathbb{R}$.

On note C_f sa représentation graphique dans un repère orthogonal du plan.

I Propriétés de C_f.

1) Pour tous x de $\mathbb{R}$ $\boxed{f(x) \geq 0}$ (car un carré est toujours positif)

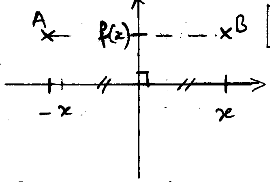
donc C_f est située au-dessus de l'axe des abscisses.

2) Pour tous x de $\mathbb{R}$

$$f(x) = x^2$$
$$f(-x) = (-x)^2 = x^2$$

donc $\boxed{f(x) = f(-x)}$

Ex:
$f(-3) = (-3)^2 = 9$
$f(3) = 3^2 = 9$



$\boxed{x \text{ et } -x \text{ ont la même image}}$

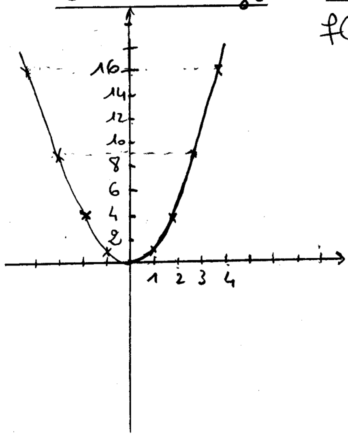
les points A, B appartiennent à C_f et sont symétriques par rapport à l'axe des ordonnées.

C_f est symétrique par rapport à l'axe des ordonnées

3) Représentation graphique (à connaître)

Calcul d'images :

x	0	1	2	3
$f(x)$	0	1	4	9



Rappel
$f(-1) = 1 = f(1)$
$f(-2) = 4 = f(2)$
$f(-3) = 9 = f(3)$
$f(-4) = 16 = f(4)$

Cette courbe s'appelle une parabole ♡.

II Variation de la fonction carrée.

♡ f est croissante sur $[0, +\infty[$
f est décroissante sur $]-\infty, 0]$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$	$+\infty$	↘	0	↗	$+\infty$

Conséquence : Application aux inégalités.

1) Si $x < -3$ alors x et -3 sont négatifs

donc $f(x) > f(-3)$ car f décroissante sur les négatifs (donc on change le sens de l'inégalité)

donc $x^2 > (-3)^2$

$\boxed{x^2 > 9}$

2) Si $x > 2\sqrt{3}$ alors x et $2\sqrt{3}$ sont positifs

donc $f(x) > f(2\sqrt{3})$ car f croissante sur les positifs (donc on ne change pas le sens de l'inégalité)

donc $x^2 > (2\sqrt{3})^2$

donc $\boxed{x^2 > 12}$

3) Sans faire de calcul, comparer $(4\pi)^2$ et 12^2

On a $4\pi > 12$ car $\pi \simeq 3{,}14$

donc $(4\pi)^2 > 12^2$ car la fonction carrée est croissante sur $[0, +\infty[$.

4) Si $-\pi \leq x < -\frac{1}{2}$ (tous les nombres sont négatifs)

alors $f(-\pi) \geq f(x) > f(-\frac{1}{2})$ (car f décroissante sur les négatifs. donc on change le sens des inégalités)

donc $(-\pi)^2 \geq x^2 > (-\frac{1}{2})^2$

$\pi^2 \geq x^2 > \frac{1}{4}$

ou $\boxed{\frac{1}{4} < x^2 \leq \pi^2}$

5) Si $-3 \leq x \leq 4$

Donner un encadrement de x^2

⚠ x peut être positif ou négatif
donc on ne peut pas utiliser directement les variations de f.

Méthode : S'aider du tableau de variation.

x	-3		0		4
$f(x) = x^2$	9	↘	0	↗	16

D'après le tableau on a $\boxed{0 \leq x^2 \leq 16}$

minimum de f sur $[-3,4]$

max de f sur $[-3,4]$

Rmq : Si $-3 < x < 4$
alors $\boxed{0 \leq x^2 < 16}$

Pour Spé Maths

Exercice : Démontrer que f est croissante sur $[0,+\infty[$.

Méthode : Soient a et b dans $[0,+\infty[$ tels que $a \leq b$
on veut démontrer que $f(a) \leq f(b)$
Il faut donc démontrer que $f(b) - f(a) \leq 0$
On a $f(b) - f(a) = b^2 - a^2$
$= (b+a)(b-a)$

1. a, b sont dans $[0,+\infty[$ donc positifs donc $b+a \geqslant 0$
2. $a \leq b$ donc $b - a \geqslant 0$
3. D'après la règle des signes $(b+a)(b-a) \geq 0$
donc $f(b) - f(a) \geqslant 0$
et donc $\boxed{f(a) \leq f(b)}$

Conclusion :
Cela prouve que f est croissante sur $[0,+\infty[$