III Equations du type $x^2 = a$ et inéquations du type $x^2 \geq a$ ou $x^2 \leq a$.

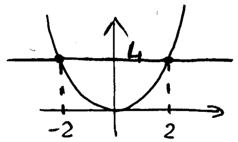
(a étant un réel)

Méthode : Utiliser la courbe de la fonction carré pour résoudre.

Ex : Résoudre dans $\mathbb{R}$ 1) $x^2 = 4$

2) $x^2 \leq 4$

3) $x^2 > 4$



Réponse : 1) $x^2 = 4$ pour $x = 2$ ou $x = -2$ $\boxed{S = \{-2 ; 2\}}$

⚠ 2 solutions !

2) $x^2 \leq 4$ pour $-2 \leq x \leq 2$ $\boxed{S = [-2 ; 2]}$

3) $x^2 > 4$ pour $x < -2$ ou $x > 2$

$\boxed{S =]-\infty ; -2[\cup]2 ; +\infty[}$

Remarque : Autre méthode pour résoudre $x^2 = a$ dans $\mathbb{R}$

* Si $a < 0$ $x^2 = a$ n'a pas de solution car x^2 est toujours positif (ex : $x^2 = -3$) $S = \emptyset$

* Si $a = 0$ $x^2 = 0$ a une seule solution $\boxed{x = 0}$ $S = \{0\}$

* Si $a > 0$ Ex : $x^2 = 3$

$x^2 - 3 = 0$

$x^2 - (\sqrt{3})^2 = 0$

$(x - \sqrt{3})(x + \sqrt{3}) = 0$

Equation produit nul

$x - \sqrt{3} = 0$ ou $x + \sqrt{3} = 0$

$\boxed{x = \sqrt{3}}$ ou $\boxed{x = -\sqrt{3}}$

Preuve pour $a > 0$.

Rmq : Si $a > 0$, $\sqrt{a}$ existe et $a = (\sqrt{a})^2$

$x^2 = a \Leftrightarrow x^2 - a = 0$

$\Leftrightarrow x^2 - (\sqrt{a})^2 = 0$

$\Leftrightarrow (x - \sqrt{a})(x + \sqrt{a}) = 0$

$x - \sqrt{a} = 0$

$x = \sqrt{a}$

ou

$x + \sqrt{a} = 0$

$x = -\sqrt{a}$

On peut retenir directement (pour les solutions dans $\mathbb{R}$)

♡

- $x^2 = 0$ 1 seule solution $\boxed{x = 0}$ $S = \{0\}$
- $x^2 = a$ avec a négatif. Aucune solution $S = \emptyset$
- $x^2 = a$ avec a positif. Deux solutions

$$\boxed{x = \sqrt{a} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{a}}$$

(1 solution positive et 1 solution négative)

Exemples

1) Résoudre $2x^2 - 3 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$2x^2 = 3$

$x^2 = \frac{3}{2}$ ($\frac{3}{2}$ positif)

donc $\boxed{x = \sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad x = -\sqrt{\frac{3}{2}}}$

2) Résoudre $-x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$x^2 = 1$ (1 positif)

donc $x = \sqrt{1}$ ou $x = -\sqrt{1}$

$\boxed{x = 1 \quad \text{ou} \quad x = -1}$

3) Résoudre $3x^2 + 1 = 0$ dans $\mathbb{R}$

$3x^2 = -1$

$x^2 = -\frac{1}{3}$ ($-\frac{1}{3}$ négatif)

donc aucune solution

Remarque : Si on sait que x est positif et que $x^2 = 7$

alors $x = \sqrt{7}$ (la solution positive) (car $-\sqrt{7}$ n'est pas possible puisque x positif)

De même si on sait que k est négatif et que $k^2 = 12$

alors $k = -\sqrt{12}$ (la solution négative)