Partie A

Soit f la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = x\ln\left(1+\frac{3}{x}\right).$$

1. **a.** Pour x dans $[1\ ;\ +\infty[$, calculer $f'(x)$ puis $f''(x)$.

   b. Déterminer le sens de variation de f' puis la limite de f' en $+\infty$

   c. En déduire le signe de f' sur $[1\ ;\ +\infty[$.

2. **a.** Dresser le tableau de variation de f

   b. Calculer la limite de f en $+\infty$.

   Pour cela on utilisera le résultat suivant : $\lim\limits_{X\to 0} \dfrac{\ln(1+X)}{X} = 1$

Partie B

Soit g la fonction définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par

$$g(x) = \frac{3x}{x+3}$$

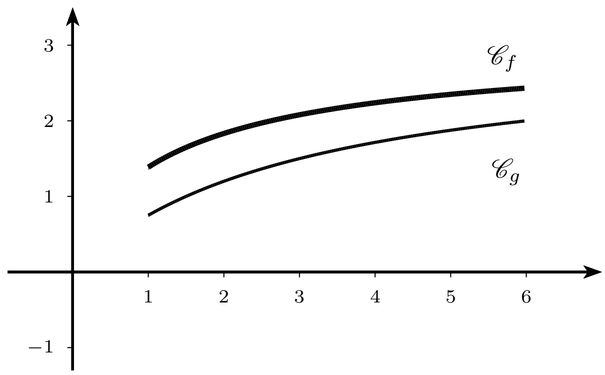
et on appelle $\mathcal{C}_g$ sa représentation graphique dans un repère orthonormé du plan.

1. Donner le tableau de variation de g sur $[1\ ;\ +\infty[$.
2. Calculer la limite de g en $+\infty$.
3. Pour x dans $[1\ ;\ +\infty[$, exprimer $f(x) - g(x)$ en fonction de $f'(x)$.
4. Déterminer le signe de $f(x) - g(x)$.

   Donner une interprétation graphique du résultat.

Partie C

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on donne les courbes $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.



Soit a appartenant à $[1\ ;\ +\infty[$.

1. Donner une équation de la tangente T_a à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse a.
2. Montrer que T_a coupe l'axe des ordonnées au point d'ordonnée $g(a)$.
3. En déduire à l'aide du tracé de $\mathcal{C}_g$, la construction de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point A d'abscisse 3.