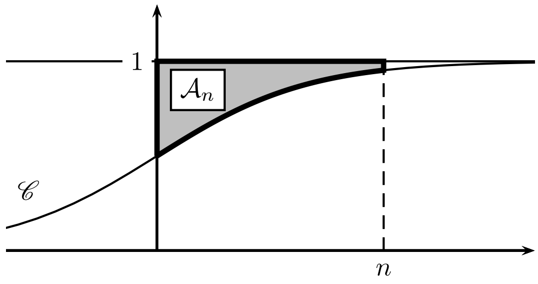
Exercice 1

On désigne par f la fonction définie sur $\mathbb{R}$ par $\quad f(x) = \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{-x}}$

et on note $\mathscr{C}$ sa courbe représentative dans un repère du plan.

Soit n un entier naturel.

On note $\mathcal{A}_n$ l'aire du domaine grisé sur la figure, exprimée en unité d'aire.



1. **a.** Démontrer que la droite d'équation $y = 1$ est une asymptote à la courbe $\mathscr{C}$ en $+\infty$.

   b. Démontrer que la courbe $\mathscr{C}$ est toujours en-dessous de la droite d'équation $y = 1$.

2. **a.** Vérifier que pour tout nombre réel x $\quad f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^x}{1+\mathrm{e}^x}$

   b. Calculer $\mathcal{A}_n$.

   c. Exprimer $\mathcal{A}_n$ en fonction de $f(n)$ puis en déduire la limite éventuelle de $\mathcal{A}_n$, lorsque n tend vers $+\infty$.

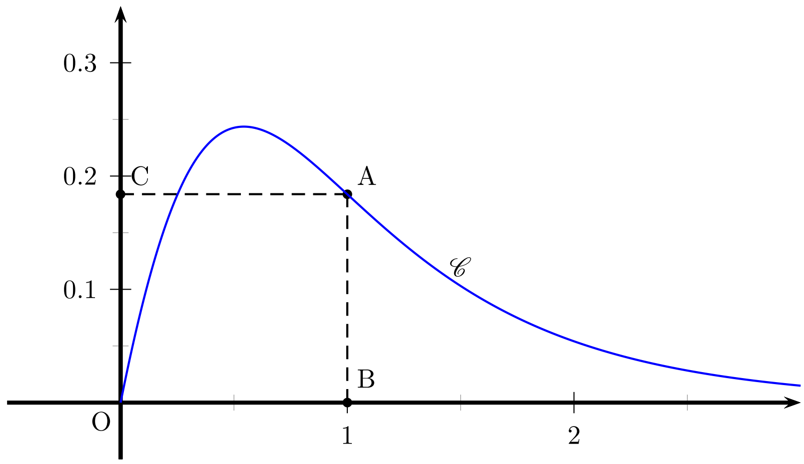
Exercice 2

Le plan est muni d'un repère orthogonal $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

La courbe $(\mathscr{C})$, donnée ci-dessous, est la courbe représentative de la fonction f est définie sur $[0~;~+\infty[$ par :

$$f(x) = \frac{x\mathrm{e}^{-x}}{x^2+1}.$$

La courbe $\mathscr{C}$ passe par le point O et on note A le point de $\mathscr{C}$ d'abscisse 1.



1. **a.** Calculer l'aire du rectangle ABOC.

   b. Que représente cette valeur pour $\displaystyle\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x$?

2. On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par :

$$u_n = \int_n^{2n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   a. Montrer que pour tout x de $[0~;~+\infty[$, $\quad 0 \leqslant \dfrac{x}{x^2+1} \leqslant \dfrac{1}{2}$.

   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $\quad 0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{1}{2}\left(\mathrm{e}^{-n} - \mathrm{e}^{-2n}\right)$.

   c. En déduire la limite de u_n quand n tend vers $+\infty$.