On considère la fonction f définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$f(x) = \frac{\ln(x+3)}{x+3}.$$

1. On donne le tableau de variations de f sur $[0\ ;\ +\infty[$

Justifier les variations de f et les valeurs indiquées dans le tableau.

x	0	$+\infty$
$f(x)$	$\frac{\ln 3}{3}$ ↘	0

2. On définit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n par son terme général $u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$.

a. Justifier que, si $n \leqslant x \leqslant n+1$, alors $f(n+1) \leqslant f(x) \leqslant f(n)$.

b. Montrer, sans chercher à calculer u_n, que, pour tout entier naturel n,

$$f(n+1) \leqslant u_n \leqslant f(n).$$

c. En déduire que la suite (u_n) est convergente et déterminer sa limite.

3. Soit F la fonction définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par

$$F(x) = [\ln(x+3)]^2.$$

a. Déterminer, pour tout réel positif x, le nombre $F'(x)$.

Donner une expression de $F'(x)$ en fonction de $f(x)$.

b. On pose, pour tout entier naturel n , $I_n = \displaystyle\int_0^n f(x)\,\mathrm{d}x$.

Calculer I_n.

4. On pose, pour tout entier naturel n, $S_n = u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}$.

Calculer S_n.

La suite (S_n) est-elle convergente ?