Pour tout entier $n \geqslant 1$ on définit la fonction f_n sur $\mathbb{R}$ par

$$f_n(x) = \frac{x^n}{n!}\mathrm{e}^{-x}$$

avec $n! = 1 \times 2 \times 3 \times \cdots \times n$ (produit des n premiers entiers naturels).

Partie A

1. Que vaut $3!$?

2. Donner l'expression de $f_1(x)$, $f_2(x)$, $f_3(x)$.

3. Calculer $f_3'(x)$ la dérivée de $f_3(x)$ puis démontrer que $f_3'(x)$ est du signe de $1 - \dfrac{x}{3}$

Partie B

1. Soit la fonction h définie sur $\mathbb{R}$ par $h(x) = \mathrm{e}^{-x}(-1-x)$

Démontrer que h est une primitive de f_1 sur $\mathbb{R}$.

2. Pour tout entier $n \geqslant 2$, calculer $f_n'(x)$ la dérivée de $f_n(x)$

et démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $f_n'(x) = f_{n-1}(x) - f_n(x)$.

3. Pour tout entier $n \geqslant 1$ on pose $I_n = \displaystyle\int_0^1 f_n(x)dx$.

a. Calculer I_1

b. Démontrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, on a : $I_n - I_{n-1} = \dfrac{-\mathrm{e}^{-1}}{n!}$

c. En déduire la valeur de I_2