Exercice : Loi uniforme :

On choisit au hasard un nombre dans $[2, 12]$
X est la variable aléatoire égale au nombre choisi.

1) Calculer la probabilité que le nombre choisi soit
   a) supérieur à 8
   b) supérieur à 10 sachant qu'il est supérieur ou égal à 6.

2) Calculer l'espérance de X

Exercice Loi exponentielle

La durée de vie, exprimée en année d'un appareil est une variable aléatoire notée T qui suit une loi exponentielle de paramètre 0,02

1) Calculer la probabilité que cet appareil ait une durée de vie (Résultats à 10^{-2} près)
   a) inférieure à 3 ans.
   b) supérieure à 10 ans
   c) supérieure à 10 ans sachant qu'il a déjà fonctionné 3 ans.

2) Quelle est la durée de vie moyenne de cet appareil?

Preuve de la propriété de durée de vie sans vieillissement pour la loi exponentielle.

On veut démontrer que pour tous réels t et h positifs on a $P_{(X\geq t)}(X\geq t+h) = P(X\geq h)$

① Calcul de $P(X\geq h)$

$$\begin{aligned} P(X\geq h) &= 1 - P(0\leq X\leq h)\\ &= 1 - \int_0^h \lambda e^{-\lambda x}\,dx\\ &= 1 - \left[-e^{-\lambda x}\right]_0^h\\ &= 1 - \left(-e^{-\lambda h} + e^{0}\right) = 1 + e^{-\lambda h} - 1 \end{aligned}$$

$\boxed{P(X\geq h) = e^{-\lambda h}}$ (*)

② $P_{(X\geq t)}(X\geq t+h) = \dfrac{P(X\geq t \text{ et } X\geq t+h)}{P(X\geq t)}$

[d'après la définition des probabilités totales]

$$= \frac{P(X\geq t+h)}{P(X\geq t)}$$

$$= \frac{e^{-\lambda(t+h)}}{e^{-\lambda t}}$$

d'après (*) en remplaçant h par t+h puis h par t

$$= \frac{e^{-\lambda t-\lambda h}}{e^{-\lambda t}}$$

$$= \boxed{e^{-\lambda h}}$$

D'où l'égalité est vérifiée