I. Variable aléatoire discrète ou continue

Définition :

Soit Ω l'ensemble des issues possibles d'une expérience aléatoire.

X est une **variable aléatoire** sur Ω si X est une fonction de Ω dans $\mathbb{R}$.

Exemple 1 **Variable aléatoire discrète**

Dans une urne, contenant 6 boules rouges et 2 boules blanches on pioche 3 boules simultanément.

On a $\Omega = \{\{R, R, R\}\,;\{R, R, B\}\,;\{R, B, B\}\,;\{B, B, B\}\}$

X est la variable aléatoire qui à un tirage donne le nombre de boules blanches.

Valeurs possibles de X : 0 ; 1 ; 2

Exemples : $X(\{R, R, B\}) = 1$ $X(\{R, B, B\}) = 2$

Définition :

On dit que X est une variable aléatoire **discrète** car les valeurs de X sont en nombre fini (3 valeurs possibles)

Exemple 2 **Variable aléatoire continue**

On s'intéresse à la durée de vie d'une ampoule.

X est la variable aléatoire qui à chaque ampoule associe sa durée de vie en heures.

Exemple : si une ampoule notée A a une durée de vie de 1 200 heures, on note $X(A) = 1\ 200$

On note $X(A) = a$ $a \in [0\ ;\ +\infty[$

X peut prendre toute valeur de l'intervalle $[0\ ;\ +\infty[$

Définition :

Quand une variable aléatoire peut prendre toutes les valeurs d'un **intervalle**, on dit que la variable aléatoire est **continue**

II. Exemples de lois de probabilités discrètes

1. Loi de Bernouilli

Lors d'une expérience, on s'intéresse à un caractère particulier appelé Succès et noté S.

Exemple : On pioche une boule et on considère Succès " la boule piochée est rouge".

On définit la variable aléatoire X par :

$X = 1$ si la boule est rouge (c'est-à-dire si on a un succès)

$X = 0$ si la boule n'est pas rouge (c'est-à-dire si on a un échec)

Loi de probabilité de X :

$P(X = 1) = P(S) = p$ (que l'on a choisi de noter p)

$P(X = 0) = P(E) = 1 - p$ (probabilité de l'échec)

2. Loi binomiale

On répète une épreuve de Bernouilli n fois de façon indépendante.

Exemple : on pioche une boule, on regarde si elle est rouge puis on la remet dans l'urne.

On répète 10 fois cette expérience. On considère comme succès si la boule piochée est rouge. On note $P(S) = p$

On considère X la variable aléatoire qui compte le nombre de succès.

Valeurs possibles de X : 0, 1, 2, ..., 10

Loi de probabilité de X : Loi binomiale notée $\mathcal{B}(10\ ;\ p)$

définie pour k allant de 0 à 10 par : $\boxed{P(X=k) = \binom{10}{k}\ p(S)^k\ p(E)^{10-k}}$ c'est-à-dire $\boxed{P(X=k) = \binom{10}{k}\ p^k\ (1-p)^{10-k}}$

III. Exemple de loi de probabilité continue

On s'intéresse à la durée de vie d'une ampoule. On a relevé la durée de fonctionnement d'un lot de 5000 ampoules.

On a représenté ci-dessous le résultat de cette expérience sous forme d'histogramme.

On note X la variable aléatoire qui donne la durée de fonctionnement d'une ampoule en jours.

Valeurs possibles de X : tous les nombres de $[0\,;\,+\infty[$.

On souhaite calculer la probabilité que la durée de vie d'une ampoule soit comprise entre 10 et 30 jours, on veut donc calculer $P\left(X \in [10\ ;\ 30]\ \right)$ ou $P\left(10 \leqslant X \leqslant 30\right)$

L'histogramme a été construit de façon à ce que l'aire de chaque rectangle soit égale à la fréquence de la classe associée. Exemple : l'aire du premier rectangle est égal à la fréquence du nombre d'ampoules de durée de vie inférieure à 10 jours.

La taille de l'échantillon étant très grande (5000) la probabilité $P\left(X \in [0\ ;\ 10]\ \right)$ est proche de l'aire de ce rectangle et de même la probabilité $P\left(X \in [10\ ;\ 30]\ \right)$ est proche de la somme des aires des deux rectangles correspondants.

On constate que l'on peut approcher cet histogramme par une fonction f et par définition :

$$P\left(10 \leqslant X \leqslant 30\right) = \int_{10}^{30} f(x)\ dx$$