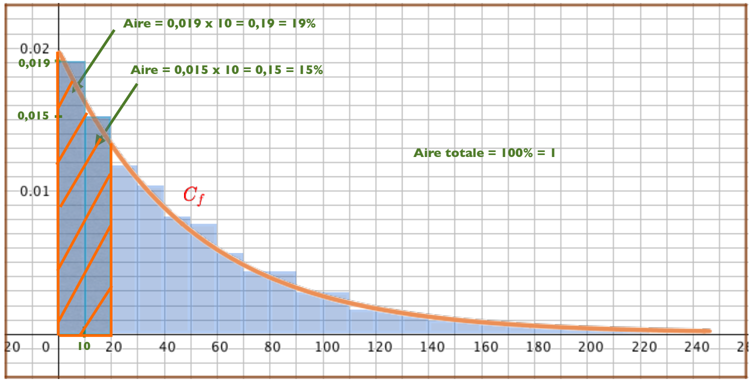
On a relevé la durée de vie (en jours) de 5000 ampoules :

19% des ampoules ont eu une durée de vie inférieure à 10 jours
15% des ampoules ont eu une durée de vie comprise entre 10 et 20 jours



On note X la durée de vie d'une ampoule en jours

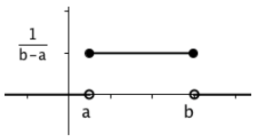
P(0≤X≤20) ≃ 0,19 + 0,15 (car le nombre total d'ampoules est très grand)
(Somme des aires des deux premiers rectangles)

Par définition, la fonction f étant donnée

$$\boxed{P(0 \leqslant X \leqslant 20) = \int_0^{20} f(x)\mathrm{d}x}$$ (Aire hachurée)

1. Densités de probabilité : des fonctions particulières

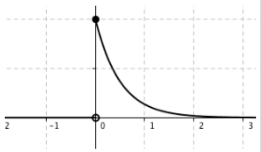
Exemple 1



$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}}$$

Loi uniforme sur [a;b]

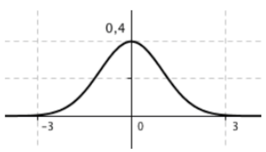
Exemple 2



$$\boxed{f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}}$$

Loi exponentielle (de paramètre λ)
ou
Loi de durée de vie sans vieillissement

Exemple 3



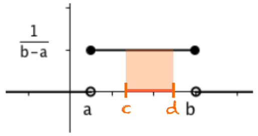
$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2} \quad \text{sur } \mathbb{R}$$

Loi normale
«Courbe en cloche»

f est une <u>densité de probabilité</u> si

1. f est continue sur R sauf peut-être en un nombre fini de points
2. f est positive sur R
3. L'aire du domaine délimité par la courbe de f et l'axe des abscisses est égale à 1

Loi uniforme sur un intervalle [a ; b]



On choisit au hasard un nombre entre a et b
X est la variable aléatoire égale au nombre choisi.
X suit la loi uniforme sur [a ; b]

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si} \quad a \leqslant x \leqslant b \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

<u>Remarques</u> : P(X=c)=0

P(c<X<d) = P(c≤X≤d) = P(c<X≤d) = P(c≤X<d)

<u>Calculer la probabilité que X soit entre c et d</u>

$$P(c<X<d) = \text{Aire orange} = (d-c) \times \frac{1}{b-a} = \frac{d-c}{b-a}$$

$$\boxed{P(c<X<d) = \frac{\text{longueur de } [c;d]}{\text{longueur de } [a;b]}}$$

Espérance de X : $\boxed{E(X) = \frac{a+b}{2}}$

<u>Exemple</u> : on choisit au hasard un nombre entre -2 et 10.

1. Quelle est la probabilité que ce nombre soit entre 3 et 7 ?

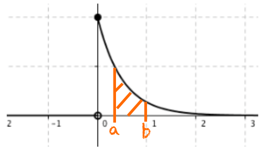
On note X est la variable aléatoire égale au nombre choisi.

$$P(3<X<7) = \frac{\text{longueur de } [3;7]}{\text{longueur de } [-2;10]} = \frac{7-3}{10-(-2)} = \frac{4}{12} = \frac{1}{3}$$

2. Si on réalise cette expérience 200 fois. Quel est le nombre moyen espéré ?

$$E(X) = \frac{a+b}{2} = \frac{-2+10}{2} = 4$$

Loi exponentielle (de paramètre λ)



<u>Remarque</u> : Lecture graphique du paramètre λ $\boxed{\lambda = f(0)}$

$$f(x) = \begin{cases} \lambda\, e^{-\lambda x} & \text{si} \quad x \geqslant 0 \\ 0 & \text{si} \quad x < 0 \end{cases}$$

$$\boxed{P(a \leqslant X \leqslant b) = \int_a^b \lambda \mathrm{e}^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \left[-\mathrm{e}^{-\lambda x}\right]_a^b}$$

$$\boxed{P(X > a) = 1 - P(0 \leqslant X \leqslant a)}$$

Espérance de X : $\boxed{E(X) = \frac{1}{\lambda}}$

Cette loi est aussi appelée <u>durée de vie sans vieillissement</u> car :

Pour tous réels t et h positifs on a : $\boxed{P_{(X \geqslant t)}(X \geqslant t+h) = P(X \geqslant h)}$

La durée de vie de l'objet ne dépend pas du temps déjà écoulé

Exemple : quelle est la probabilité que l'appareil fonctionne pendant 15 ans alors qu'il a déjà fonctionné 5 ans ?

$$P_{(X \geqslant 5)}(X \geqslant 15) = P(X \geqslant 10)$$
$$= 1 - P(0 \leqslant X \leqslant 10)$$