Suite définie par une intégrale

Partie A

Soit la fonction f définie et dérivable sur $[1\ ;\ +\infty[$ telle que, pour tout nombre réel x supérieur ou égal à 1, $f(x) = \dfrac{1}{x}\ln(x)$.

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé.

1. Démontrer que la courbe $\mathcal{C}$ admet une asymptote horizontale.

2. Déterminer la fonction dérivée f' de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

3. Étudier les variations de la fonction f sur $[1\ ;\ +\infty[$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_n = \displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x)\,\mathrm{d}x$ pour tout entier naturel n.

1. Démontrer que $u_0 = \dfrac{1}{2}[\ln(2)]^2$.

Interpréter graphiquement ce résultat.

2. Prouver que, pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel x de l'intervalle $[1\,;\,2]$, on a

$$0 \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(x) \leqslant \frac{1}{x^{n+1}}\ln(2).$$

3. En déduire que, pour tout entier naturel non nul n, on a $0 \leqslant u_n \leqslant \dfrac{\ln(2)}{n}\left(1 - \dfrac{1}{2^n}\right)$

4. Déterminer la limite de la suite (u_n).