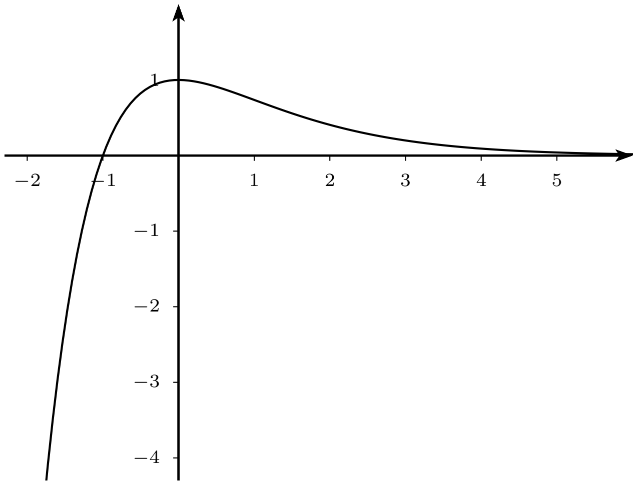
Soit f la fonction définie pour tout nombre réel x par :

$$f(x) = (1+x)\mathrm{e}^{-x}$$

On donne ci-dessous la représentation graphique de la fonction f dans un repère $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$du plan.



On note (I_n) la suite définie pour tout entier naturel n par :

$$I_n = \int_{-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

1. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$: $I_n \geqslant 0$.

2. Montrer que la suite (I_n) est croissante.

3. **a.** Pour tous réels x, on pose : $F(x) = \mathrm{e}^{-x}(-x-2)$.

Démontrer que, pour tous réels a et b :

$$\int_{a}^{b} f(x)\,\mathrm{d}x = F(b) - F(a).$$

b. En déduire l'expression de I_n en fonction de n.

c. Déterminer : $\lim\limits_{n\to+\infty} I_n$.

d. Donner une interprétation graphique de cette limite.

4. A l'aide de la question **3.a**, déterminer $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que : $\displaystyle\int_{-1}^{\alpha} f(x)\,\mathrm{d}x = \mathrm{e}$.

Ce calcul intégral correspond-il à un calcul d'aire ?