TD Fonction cube

$f(x) = x^3$ sur $\mathbb{R}$.

I Calcul d'images et représentation graphique dans repère $(O, \vec{i}, \vec{j})$

$f(0) = 0^3 = 0$ → point $(0,0)$ O

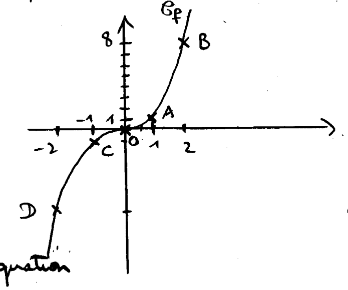
$f(1) = 1^3 = 1$ → point $(1,1)$ A

$f(2) = 2^3 = 8$ → point $(2,8)$ B

$f(-1) = (-1)^3 = -1$ → point $(-1,-1)$ C

$f(-2) = (-2)^3 = -8$ → point $(-2,-8)$ D

A connaître



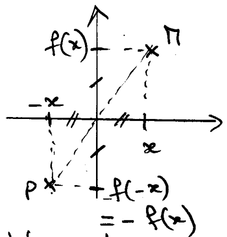
Cf a pour équation $\boxed{y = x^3}$

Conjecture : Cf est symétrique par rapport à l'origine. (par rapport au point O)

Preuve :

Soit $x > 0$

$f(-x) = (-x)^3 = -x^3 = -f(x)$



$\boxed{M(x, f(x))} \in C_f$

$P(-x, f(-x)) \in C_f$

on a aussi $\boxed{P(-x, -f(x))}$

donc M et P sont symétriques par rapport au point O.

II Variations.

Propriété : La fonction cube (ou la fonction $x \mapsto x^3$) est définie sur $\mathbb{R}$ et est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Preuve : Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x^3$

Montrons que f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Soient a, b positifs tels que $a < b$.

Montrons que $f(a) < f(b)$

càd $a^3 < b^3$.

càd $b^3 - a^3 > 0$.

* Pour cela, commencer par démontrer que pour tous réels a et b on a : $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$

On a : $(b-a)(b^2+ab+a^2)$

$= b^3 + \cancel{ab^2} + \cancel{a^2b} - \cancel{ab^2} - \cancel{a^2b} - a^3$

$= b^3 - a^3$

l'égalité est donc vérifiée

* Montrons que si $a < b$ alors $b^3 - a^3 > 0$

On a $b^3 - a^3 = (b-a)(b^2 + ab + a^2)$

Si $a < b$ alors $b - a > 0$.

Si a et b sont positifs alors ab est positifs et donc $b^2 + ab + a^2 > 0$

Par produit $(b-a)(b^2+ab+a^2) > 0$

et donc $b^3 - a^3 > 0$

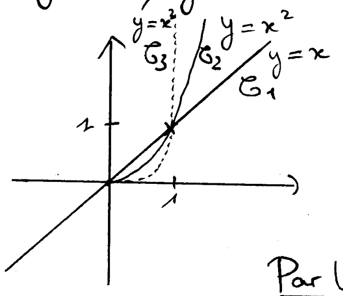
et donc f strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Rmq : si $a = 0$, $b \neq 0$. donc $b^2 \neq 0$ et donc $b^2 + ab + a^2 \neq 0$

Rmq : On montre de la même façon que f est strictement croissante sur $]-\infty, 0]$

Dans ce cas a, b sont négatifs et donc ab est positif et on arrive à $b^3 - a^3 > 0$.

III Positions relatives des courbes d'équation $y = x$, $y = x^2$, $y = x^3$ pour $x \geq 0$.



Représenter ces 3 courbes sur votre calculatrice

$\mathscr{C}_1$ a pour équation $y = x$

$\mathscr{C}_2$ ——— $y = x^2$

$\mathscr{C}_3$ ——— $y = x^3$.

Par lecture graphique

Sur $[0, 1]$ $\mathscr{C}_3$ sous $\mathscr{C}_2$ sous $\mathscr{C}_1$

donc $\boxed{\text{pour } x \in [0,1],\ x^3 < x^2 < x}$ ♡

Sur $[1, +\infty[$ $\mathscr{C}_1$ sous $\mathscr{C}_2$ sous $\mathscr{C}_3$

donc $\boxed{\text{pour } x > 1, \text{ on a : } x < x^2 < x^3}$ ♡

Exemples

moyen pour ne pas se tromper

1) $(0,2)^3 < (0,2)^2 < 0,2$

$\times 0,2$ $\times 0,2$ or $0,2 < 1$

donc $(0,2)^2 < 0,2$

en effet.

Quand on multiplie par un nombre inférieur à 1 le résultat est plus petit que le nombre de départ

2) $(4,1)^3 > (4,1)^2 > 4,1$

$\times 4,1$ $\times 4,1$ or $4,1 > 1$

donc le résultat est plus grand que $4,1$

Quand on multiplie par un nombre supérieur à 1 le résultat est plus grand que le nombre de départ.

n° 80 p 136

1) $0 < \frac{2}{3} < 1$ donc $\left(\frac{2}{3}\right) > \left(\frac{2}{3}\right)^2 > \left(\frac{2}{3}\right)^3$

2) $\frac{32}{31} > 1$ donc $\frac{32}{31} < \left(\frac{32}{31}\right)^2 < \left(\frac{32}{31}\right)^3$.

3) $0 < \sqrt{0,5} < 1$ car $0,5 < 1$

et $\sqrt{0,5} < \sqrt{1}$ car f^n racine carrée strict^t croissante sur $[0, +\infty[$

càd $\sqrt{0,5} < 1$

donc $\sqrt{0,5} > \sqrt{0,5}^2 > \sqrt{0,5}^3$

$\sqrt{0,5} > 0,5 > \sqrt{0,5}^3$

4) $\sqrt{\pi - 1}$ $\pi - 1 \simeq 2,14$

donc $\pi - 1 > 1$

et $\sqrt{\pi - 1} > \sqrt{1}$

càd $\boxed{\sqrt{\pi - 1} > 1}$

donc $\sqrt{\pi - 1} < \left(\sqrt{\pi - 1}\right)^2 < \left(\sqrt{\pi - 1}\right)^3$

càd $\sqrt{\pi - 1} < \pi - 1 < \sqrt{\pi - 1}^3$