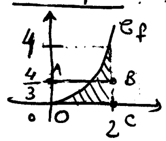
# TD Intégrales (13)

## VII Valeur moyenne d'une fonction continue.

1) **Exemple** : $f(x) = x^2$ sur $[0;2]$

$y_A = \frac{4}{3}$




① Calculer l'aire du rectangle OABC

② Calculer l'aire hachurée. $\mathcal{A}_R$

③ Que remarque-t-on ?

① Aire (OABC) $= 2 \times \frac{4}{3} = \boxed{\frac{8}{3}}$

② $f(x) \geq 0$ sur $[0,2]$ donc $\mathcal{A}_R = \int_0^2 f(x)\,dx$

$\mathcal{A}_R = \int_0^2 x^2\,dx = \left[\frac{x^3}{3}\right]_0^2 = \frac{1}{3}\left[x^3\right]_0^2$

$= \frac{1}{3}(2^3 - 0^3) = \boxed{\frac{8}{3}}$

③ On remarque que ces deux aires sont égales

**Définition** Le nombre $\frac{4}{3}$ est appelé valeur moyenne de $f$ sur $[0,2]$

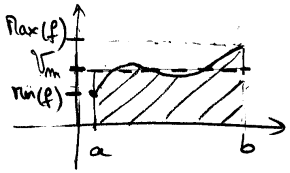
On note : $V_m = \frac{4}{3}$

2) Valeur moyenne d'une fonction continue sur $[a,b]$, $a \neq b$

♡ $$\boxed{V_m = \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx}$$

**Propriété** : Pour $f \geq 0$ sur $[a,b]$

$$\underbrace{V_m \times (b-a)}_{\text{aire du rectangle}} = \underbrace{\int_a^b f(x)\,dx}_{\text{aire hachurée}}$$




**Propriété** : $\text{Min}(f) \leq V_m \leq \text{Max}(f)$

# TD Intégrales (14)

**Preuve** On note $\text{Min}(f) = m$ $\quad \text{Max}(f) = M$

$\forall x \in [a;b] \quad m \leq f(x) \leq M$

donc $\int_a^b m\,dx \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq \int_a^b M\,dx$

$[mx]_a^b \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq [Mx]_a^b$

$m[x]_a^b \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M[x]_a^b$

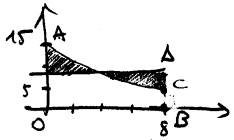
$m(b-a) \leq \int_a^b f(x)\,dx \leq M(b-a)$

$m \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \leq M$

donc $\boxed{m \leq V_m \leq M}$

3) **Exercices** :

**Ex 1** n° 58 p 263 $\quad A(0,15) \quad B(8,0) \quad C(8,5)$




a) Déterminer $a, b$ pour que la courbe ait comme équation $y = \frac{a}{x+b}$.

- Si $x = 0$ $\quad y = 15$ donc $\frac{a}{b} = 15$ ou $\boxed{a = 15b}$ (1)
- Si $x = 8$ $\quad y = 5$ donc $\boxed{\frac{a}{8+b} = 5}$ (2)

Par substitution dans (2)

$\frac{15b}{8+b} = 5$ donc $15b = 5(8+b)$

$15b = 40 + 5b$

$10b = 40$

$\boxed{b = 4}$

puis $a = 15b = 15 \times 4 = 60$

Donc $\boxed{y = \frac{60}{x+4}}$

TD Intégrals (15)

b) La droite $\Delta$ est parallèle à l'axe $(ox)$

Déterminer son équation telle que les aires des deux parties coloriées soient égales.

Ces deux aires sont égales si l'équation de $\Delta$ est $y = V_m$ avec $V_m$ valeur moyenne de $f$ sur $[0,8]$

donc $V_m = \frac{1}{8}\int_0^8 f(x)\,dx$

$$V_m = \frac{1}{8}\int_0^8 \frac{60}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{1}{8} \times 60 \int_0^8 \frac{1}{x+4}\,dx$$

$$= \frac{15}{2}\left[\ln(x+4)\right]_0^8 \quad \text{car } x+4>0 \text{ sur } [0,8]$$

$$= \frac{15}{2}\left(\ln(12) - \ln 4\right)$$

$$= \frac{15}{2}\ln\left(\frac{12}{4}\right) =$$

$$\boxed{V_m = \frac{15}{2}\ln(3)}$$

Donc $\Delta$ a pour équation $\boxed{y = \frac{15}{2}\ln(3)}$