TD Fonction racine carrée

I Définition

Rappel : Pour $x \geqslant 0$, $\sqrt{x}$ est le nombre positif tel que $(\sqrt{x})^2 = x$

On définit alors une fonction f définie sur $[0, +\infty[$ par $x \xrightarrow{f} \sqrt{x}$

f est appelée fonction racine carrée.

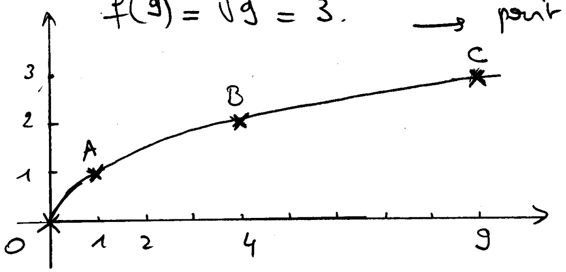
Pour $x \geqslant 0$ $\boxed{f(x) = \sqrt{x}}$

Propriété : Pour tout $x \geqslant 0$, $f(x) \geqslant 0$
Donc $\mathcal{C}_f$ est située au-dessus de l'axe (Ox)

II Représentation graphique dans un repère du plan.

Calcul d'images particulières :

$f(0) = \sqrt{0} = 0 \longrightarrow$ point $O(0,0)$
$f(1) = \sqrt{1} = 1 \longrightarrow$ point $A(1,1)$
$f(4) = \sqrt{2} = 2 \longrightarrow$ point $B(4,2)$
$f(9) = \sqrt{9} = 3. \longrightarrow$ point $C(9,3)$



$\boxed{\text{A connaître !}}$

Conjecture. f est strictement croissante sur $[0, +\infty[$

Preuve de la conjecture :

Soient a et b deux nombres positifs tels que $a < b$

Démontrons que $\sqrt{a} < \sqrt{b}$. . Pour cela on va démontrer que $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$

TD F° racine carrée (2).

Remarque : $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) = (\sqrt{b})^2 - (\sqrt{a})^2$ d'après une identité remarquable.

donc $(\sqrt{b} - \sqrt{a})(\sqrt{b} + \sqrt{a}) = b - a$

et donc $\sqrt{b} - \sqrt{a} = \dfrac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}}$

puisque $\sqrt{b} + \sqrt{a} \neq 0$
$\left\{ \begin{array}{l} \text{en effet si } a = 0 \text{ alors } b \neq 0. \\ \text{donc } \sqrt{a} = 0 \text{ et } \sqrt{b} \neq 0. \end{array} \right.$

On a : $a < b$ donc $b - a > 0$
$\sqrt{a} \geqslant 0$ et $\sqrt{b} > 0$ donc $\sqrt{b} + \sqrt{a} > 0$

Conclusion $\dfrac{b-a}{\sqrt{b} + \sqrt{a}} > 0$ et donc $\sqrt{b} - \sqrt{a} > 0$.

III Variations de la fonction racine carrée

1) **Propriété** : La fonction racine carrée est strictement croissante sur $[0 + \infty[$

2) **Application** :

$\boxed{\text{Ex 1}}$ Comparer $2\sqrt{3}$ et $\sqrt{11}$

On a $2\sqrt{3} = \sqrt{4} \times \sqrt{3} = \sqrt{12}$

$11 < 12$
donc $\sqrt{11} < \sqrt{12}$ $\big)$ f° racine carrée ↗
donc $\boxed{\sqrt{11} < 2\sqrt{3}}$

$\boxed{\text{Ex 2}}$ Comparer $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}$ et $\sqrt{\pi}$

On a : $\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}} = \sqrt{\dfrac{7}{2}} = \sqrt{3{,}5}$

$\pi \simeq 3{,}14$ donc $\pi < 3{,}5$

et donc $\sqrt{\pi} < \sqrt{3{,}5}$

càd $\boxed{\sqrt{\pi} < \dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{2}}}$

TD F° racine carrée (3)

IV Relation avec la fonction carrée.

Ex: Si $\sqrt{x} = 4$ alors $x = 4^2 = 16$.

Si $x^2 = 4$ alors $x = \sqrt{4} = 2$
ou $x = -\sqrt{4} = -2$ } ⚠ 2 solutions

Propriété: 1) Pour $x \geqslant 0$ et $a \geqslant 0$
Si $\sqrt{x} = a$ alors $x = a^2$

♡ 2) Pour tous réels x et $a \geqslant 0$
Si $x^2 = a$ alors $x = \sqrt{a}$ ou $x = -\sqrt{a}$

Propriété: 1) Pour tous réels $x \geqslant 0$ $(\sqrt{x})^2 = x$.

♡ 2) Pour tous réels x $\sqrt{x^2} = |x|$

cad $\sqrt{x^2} = \begin{cases} x & \text{si } x \geqslant 0 \\ -x & \text{si } x \leqslant 0 \end{cases}$

Exemple: $\sqrt{(2\pi - 3)^2} = |2\pi - 3| = 2\pi - 3$ car $2\pi - 3 > 0$ puisque $2\pi > 3$

$$\sqrt{(5-\sqrt{30})^2} = |5-\sqrt{30}| = -(5-\sqrt{30})$$
$$= -5 + \sqrt{30}$$
$$= \boxed{\sqrt{30} - 5}$$

On cherche le signe de $5-\sqrt{30}$

Méthode: Comparer 5 et $\sqrt{30}$

$5 = \sqrt{25}$ et $25 < 30$
donc $\sqrt{25} < \sqrt{30}$
donc $5 < \sqrt{30}$
et donc $5 - \sqrt{30} < 0$