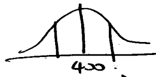
An. Nord Juin 2013



A

1) $p(390 \leq X \leq 410) = p(X \leq 410) - p(X \leq 390)$

$= 0{,}818 - 0{,}182 = \boxed{0{,}636}$

2) $p = p(X \geq 385)$

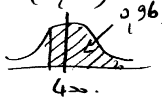
$= 1 - p(X \leq 385) = 1 - 0{,}086 = \boxed{0{,}914}$

3) On cherche σ donc on se ramène à la loi $\mathcal{N}(0,1)$

Si X suit la loi $\mathcal{N}(400, \sigma)$

alors $Y = \dfrac{X-\mu}{\sigma} = \dfrac{X-400}{\sigma}$ suit la loi $\mathcal{N}(0,1)$

On veut que $p(X \geq 385) \doteq 0{,}96$.



$p(X \leq 385) = 0{,}04$

$p(X - 400 \leq -15) \doteq 0{,}04$

$p\left(\dfrac{X-400}{\sigma} \leq -\dfrac{15}{\sigma}\right) \doteq 0{,}04$

$p\left(Y \leq -\dfrac{15}{\sigma}\right) = 0{,}04$

$-\dfrac{15}{\sigma} \simeq -1{,}751$

$\sigma \simeq \dfrac{15}{1{,}751}$ $\boxed{\sigma \simeq 8{,}6}$

B

1) $P(T \geq 30) = 0{,}913$

donc $P(0 \leq T \leq 30) = 0{,}087$

$\int_0^{30} \lambda e^{-\lambda x}\,dx = 0{,}087$

$\left[-e^{-\lambda x}\right]_0^{30} = 0{,}087$

$-e^{-30\lambda} + 1 = 0{,}087$

$e^{-30\lambda} = 0{,}913$

$-30\lambda = \ln(0{,}913)$

$\lambda = \dfrac{\ln(0{,}913)}{-30} \simeq \boxed{0{,}003}$

2) $P(T \geq 90) = P(T \geq 30)$ d'après la durée de vie
$(T \geq 60)$

$= \boxed{0{,}913}$ sans vieillissement pour une loi exponentielle

3) A-t-on $P(T \geq 365) = 0{,}5$?

$P(T \geq 365) = 1 - P(0 \leq T \leq 365)$

$= 1 - \int_0^{365} \lambda e^{-\lambda x}\,dx$

$= 1 - \left(-e^{-365 \times 0{,}003} + 1\right)$

$= e^{-1{,}095}$

$\simeq \boxed{0{,}335}$ donc il a tort.

On cherche t tel que

$P(T \geq t) = 0{,}5$

$P(0 \leq T \leq t) = 0{,}5$

$-e^{-t \times 0{,}003} + 1 = 0{,}5$

$-e^{-0{,}003t} = -0{,}5$

$-0{,}003t = \ln(0{,}5)$

$t = \dfrac{\ln(0{,}5)}{-0{,}003} \simeq \boxed{231}$

Donc 1 chance sur 2 que la balance dure plus de 231 jours.