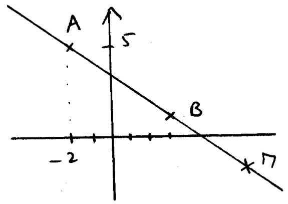
TD Equations de droite (3)

I Equations cartésiennes d'une droite :

1) Exemple :



$A(-2, 5)$
$B(3, 1)$
$M(x, y)$

$M \in (AB)$
$\iff A, B, M$ sont alignés.
$\iff \overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AM}$ sont colinéaires
$\iff \det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AM}) = 0$
$\iff \begin{vmatrix} 5 & x+2 \\ -4 & y-5 \end{vmatrix} = 0$

$\overrightarrow{AB}(3+2, 1-5)$
$\overrightarrow{AB}(5, -4)$
$\overrightarrow{AM}(x+2, y-5)$

$\iff 5(y-5) - (x+2)\times(-4) = 0$
$\iff 5y - 25 - (-4x - 8) = 0$
$\iff 5y - 25 + 4x + 8 = 0$
$\iff 4x + 5y - 17 = 0$

Conclusion : $M \in (AB) \iff 4x + 5y - 17 = 0.$
$M(x,y)$

Question : $E(-1; 4)$ appartient-il à (AB) ?

Méthode : $4x + 5y - 17 = 4\times(-1) + 5\times 4 - 17$
$= -4 + 20 - 17$
$= 16 - 17$
$= -1$
$\neq 0$

Pour le point E, $4x + 5y - 17 \neq 0$
donc $E \notin (AB)$

A savoir.
$4x + 5y - 17 = 0$ est une équation de la droite (AB)
Un point appartient à la droite (AB) si et seulement si ses coordonnées vérifient l'équation de la droite

TD Equations de droite (4)

2) Exercice :

Soit la droite (d) d'équation $-x + 3y - 2 = 0$
1) le point $A(-5; 1)$ appartient-il à (d) ?
2) Soit $a \in \mathbb{R}$, déterminer a pour que $B(a; -2)$ appartienne à (d)

Réponses :
1) Pour $A(-5; 1)$ $\quad -x + 3y - 2$
$= 5 + 3 - 2$
$= 6$
$\neq 0.$ $\quad$ donc $\boxed{A \notin (d)}$

2) $B(a; -2) \in (d) \iff -a + 3\times(-2) - 2 = 0$
$\iff -a - 6 - 2 = 0$
$\iff -a - 8 = 0$
$\iff \boxed{a = -8}$

3) Théorème :

Dans un repère du plan, les coordonnées de l'ensemble des points $M(x,y)$ d'une droite vérifient une relation de la forme $\boxed{ax + by + c = 0}$
où a, b, c sont des nombres réels.
Cette relation est appelée équation cartésienne de la droite

Preuve : Soit une droite (d)
Soit A un point de (d) et $\vec{u}(\alpha, \beta)$ un vecteur directeur de (d)

$M(x,y) \in (d)$
$\iff \overrightarrow{AM}$ et $\vec{u}$ sont colinéaires $\quad \overrightarrow{AM}(x - x_A; y - y_A)$
$\iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$ $\quad \vec{u}(\alpha; \beta)$
$\iff \begin{vmatrix} x - x_A & \alpha \\ y - y_A & \beta \end{vmatrix} = 0$
$\iff \beta(x - x_A) - \alpha(y - y_A) = 0$
$\iff \beta x - \beta x_A - \alpha y + \alpha y_A = 0$
$\iff \beta x - \alpha y - \beta x_A + \alpha y_A = 0$
$\iff ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$; $b = -\alpha$, $c = -\beta x_A + \alpha y_A$

TD Equations de droite (5)

4) Propriété :

Si une droite (d) a pour équation $ax+by+c=0$ alors le vecteur $\boxed{\vec{u}(-b,a)}$ est un vecteur directeur de (d)

Preuve Cherchons un vecteur directeur de (d) en prenant 2 points M et P de la droite (d)

$M(x_M, y_M)$ $P(x_P, y_P)$

$\overrightarrow{MP}(x_P - x_M, y_P - y_M)$ $\overrightarrow{MP}$ est un vecteur directeur de (d)

$M \in (d)$ donc $ax_M + by_M + c = 0$

$P \in (d)$ donc $ax_P + by_P + c = 0$

de cette égalité on peut écrire

$c = -ax_P - by_P$.

On peut alors écrire

$ax_M + by_M - ax_P - by_P = 0$

(par factorisation de a et b) ou $a(x_M - x_P) + b(y_M - y_P) = 0$.

ou $\begin{vmatrix} x_M - x_P & -b \\ y_M - y_P & a \end{vmatrix} = 0$

càd $\det(\overrightarrow{PM}, \vec{u}) = 0$ avec $\boxed{\vec{u}(-b,a)}$

ce qui prouve que $\vec{u}$ et $\overrightarrow{PM}$ sont colinéaires

$\overrightarrow{PM}$ est un vecteur directeur de (d)

donc $\vec{u}$ aussi.

Exemple : Soit (d) d'équation $x - 2y + 3 = 0$.

$a = 1$ $b = -2$ $c = 3$

$\vec{u}(-b, a)$

$\vec{u}(2, 1)$ est un vecteur directeur de (d)