TD . Inégalités

I Variations de fonction et inégalités.

1) Rappel: Soit un intervalle I et x et y dans I

① Si $x \le y$ et f croissante sur I
alors $f(x) \le f(y)$

② Si $x \le y$ et f décroissante sur I
alors $f(x) \ge f(y)$

2) En particulier ① si $x \le y$ avec x, y positifs
alors $x^2 \le y^2$

② Si $x \le y$ avec x, y négatifs
alors $x^2 \ge y^2$

③ Si $x \le y$ avec x, y positifs non nuls ou x, y négatifs non nuls
alors $\frac{1}{x} \ge \frac{1}{y}$

④ Si $x \le y$ avec x, y positifs
alors $\sqrt{x} \le \sqrt{y}$

3) Cas des fonctions affines (ou linéaires)

$\boxed{1}$ Si $f(x) = ax$ avec $a > 0$ alors f est croissante sur $\mathbb{R}$
Si $f(x) = ax$ avec $a < 0$ alors f décroissante sur $\mathbb{R}$

Exemples * Si $x \le y$
alors $3x \le 3y$ car la fonction $x \mapsto 3x$ est croissante sur $\mathbb{R}$ $(a = 3 > 0)$

* Si $x \le y$
alors $-2x \ge -2y$ car la fonction $x \mapsto -2x$ est décroissante sur $\mathbb{R}$ $(a = -2 < 0)$

* Si $x \le y$
alors $\frac{x}{5} \le \frac{y}{5}$ car la fonction $x \mapsto \frac{x}{5}$ est croissante sur $\mathbb{R}$ $(a = \frac{1}{5} > 0)$

* Si $x \le y$
alors $\frac{x}{-2} \ge \frac{y}{-2}$ car $x \mapsto -\frac{x}{2}$ décroissante sur $\mathbb{R}$ $(a = -\frac{1}{2} < 0)$

TD Inégalités (2)

Propriété ♡ : La multiplication ou division par un nombre positif non nul ne change pas le sens de l'inégalité

♡ La multiplication ou division par un nombre négatif non nul change le sens de l'inégalité

$\boxed{2}$ Soit $k > 0$.
et $f(x) = x + k$ pour $x \in \mathbb{R}$
ou $f(x) = x - k$
f est croissante sur $\mathbb{R}$ (f° affine avec $a = 1 > 0$)
Donc si $x \le y$
alors $x + 2 \le y + 2$
ou si $x \le y$
alors $x - \frac{1}{3} \ge y - \frac{1}{3}$

Propriété ♡ : L'addition (ou soustraction) d'un nombre réel aux deux membres d'une inégalité ne change pas le sens de l'inégalité

II Application aux inéquations.

Résoudre

1) $-3x + 5 < 2$

2) $\frac{x}{4} - 1 \ge -3$

3) $x - 5 \le 2x + 4$

4) $\frac{1-2x}{3} \ge 2$

5) $\frac{3x+1}{5} \ge \frac{1}{2}$

6) $\frac{4-5x}{3} \le 0$

TD Inégalités (3)

Solutions.

1) $-3x+5<2$
$-3x < 2-5$ — -5 de chaque côté
$-3x < -3$ — $:(-3)<0$.
$x > \frac{-3}{-3}$
$\boxed{x>1}$ $\boxed{S =]1,+\infty[}$

Vérif° pour $x=2$ par ex : $-3x+5 = -1 < 2$ ok

2) $\frac{x}{4} - 1 \geq -3$ — $+1$ de chaque côté.
$\frac{x}{4} \geq -2$ — $\times 4 > 0$
$\boxed{x \geq -8}$ $\boxed{S=[-8,+\infty[}$

Vérif° pour $x=0$: $-1 \geq -3$ ok

3) $x-5 \leq 2x+4$ — $-2x$ de chaque côté.
$x-5-2x \leq 4$ — $+5$ de chaque côté.
$-x \leq 4+5$
$-x \leq 9$ — $:(-1)<0$
$\boxed{x \geq -9}$ $\boxed{S=[-9;+\infty[}$

Vérif° pour $x=0$: $-5 \leq 4$ ok

4) $\frac{1-2x}{3} \geq 2$ — $\times 3 > 0$.
$1-2x \geq 6$ — -1
$-2x \geq 5$ — $:(-2)<0$
$\boxed{x \leq -\frac{5}{2}}$ $\boxed{S =]-\infty, -\frac{5}{2}]}$

Vérif° pour $x=-4$: $\frac{1-2x}{3} = \frac{9}{3} = 3 \geq 2$ ok

5) $\frac{3x+1}{5} \geq \frac{1}{2}$ — $\times 5 > 0$
$3x+1 \geq \frac{5}{2}$ — -1
$3x \geq \frac{5}{2} - 1$
$3x \geq \frac{3}{2}$ — $:3>0$
$\boxed{x \geq \frac{1}{2}}$ $\boxed{S = [\frac{1}{2};+\infty[}$

Vérif° pour $x=1$: $\frac{3x+1}{5} = \frac{4}{5} \geq \frac{1}{2}$ ok

6) $\frac{4-5x}{3} \leq 0$ — $\times 3 > 0$
$4-5x \leq 0$ — -4
$-5x \leq -4$
$x \geq \frac{-4}{-5}$
$x \geq \frac{4}{5}$ $\boxed{S = [\frac{4}{5};+\infty[}$

TD Inégalités (4)

III Déterminer un encadrement ou une inégalité.

Exemples

① Si $-2 \leq x \leq 5$

Donner un encadrement de $(x+2)^2 - 4$

On a $0 \leq x+2 \leq 7$ car (+ 2 dans chaque membre)
$0 \leq (x+2)^2 \leq 49$ — $x+2$ et 7 sont positifs ; $x \mapsto x^2 \nearrow$ sur $[0,+\infty[$
donc $\boxed{-4 \leq (x+2)^2 \leq 45}$

② Si $-8 < x \leq 4$

Donner un encadrement de $-2(x-5)^2$

On a $-8-5 < x-5 \leq 4-5$
$-13 < x-5 \leq -1$
tous ces nombres sont négatifs
et $x \mapsto x^2$ décroissante sur $]-\infty, 0]$
donc $(-13)^2 > (x-5)^2 \geq (-1)^2$
càd $169 > (x-5)^2 \geq 1$ — $\times(-2)<0$
puis $-2\times(169) < -2(x-5)^2 \leq -2$
$\boxed{-338 < -2(x-5)^2 \leq -2}$

③ Si $x < -4$

Donner une inégalité vérifiée par $\frac{1}{2-5x}$

$-5x > 20$ — $+2$
$2-5x > 22$
— 22 et donc $2-5x$ sont positifs ; $x \mapsto \frac{1}{x} \searrow$ sur $]0,+\infty[$
$\boxed{\frac{1}{2-5x} < \frac{1}{22}}$