TD Equations de droites (10)

IV Equations réduites :

1) Propriété : Toute droite a une équation de la forme $y = ax + b$ (relation entre x et y)

ou $y = b$ (condition sur y)

ou $x = b$ (condition sur x)

avec a, b deux nombres réels.

Ces équations sont appelées équation réduite de la droite.

Exemples

① Si (d) a pour équation $3x - 4y - 1 = 0$

alors $-4y = -3x + 1$

et $\boxed{y = \frac{3}{4}x - \frac{1}{4}}$

(Equation de la forme $y = ax + b$ avec $a = \frac{3}{4}$ et $b = -\frac{1}{4}$)

② Si (d) a pour équation $-5x + 7 = 0$

alors $-5x = -7$

$\boxed{x = \frac{7}{5}}$

(Equation de la forme $x = b$)

③ Si (d) a pour équation $3y - 2 = 0$

alors $\boxed{y = \frac{2}{3}}$

(Equation de la forme $y = b$)

Preuve de la propriété :

Toute droite a une équation cartésienne de la forme $ax + by + c = 0$ avec a, b, c nombres réels et a, b non nuls en même temps.

1er cas : $a \neq 0$ et $b \neq 0$.

alors $by = -ax - c$

et $b \neq 0$ donc $y = -\frac{a}{b}x - \frac{c}{b}$

(Equation de la forme $y = ax + b$)

TD Equations de droite (11)

2ème cas : $a = 0$ et $b \neq 0$

donc (d) a pour équation $by + c = 0$

comme $b \neq 0$ $y = -\frac{c}{b}$.

(Equation de la forme $y = b$)

3ème cas : $a \neq 0$ et $b = 0$

donc (d) a pour équation $ax + c = 0$

comme $a \neq 0$ $x = -\frac{c}{a}$

(Equation de la forme $x = b$)

2) Equation réduite d'une droite

① Si (d) a pour équation réduite $y = ax + b$.
alors (d) est la représentation graphique d'une fonction affine f

a est le coefficient directeur de la droite

b est l'ordonnée à l'origine.

($b = f(0)$)

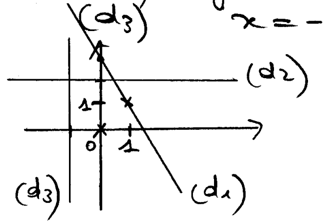
② Si (d) a pour équation réduite $y = b$
alors (d) est la représentation graphique d'une fonction constante.

③ Si (d) a pour équation réduite $x = b$
(d) n'est pas la représentation graphique d'une fonction.

Exemples : (d_1) : $y = -2x + 3$ $\rightarrow$ $A(0, 3)$, $B(1, 1)$

(d_2) $y = 2$

(d_3) $x = -1$



Rmq : (d_3) n'est pas la représentation graphique d'une fonction car $x = -1$ aurait plusieurs images

3) Lien entre coefficient directeur et vecteur directeur d'une droite.

Rappel : Toute droite non parallèle à l'axe des ordonnées a un coefficient directeur car une équation réduite de la forme $y = ax + b$ (a, b deux réels)

Propriété :

a est le coefficient directeur d'une droite (d) si et seulement si le vecteur $\boxed{\vec{u}(1;a)}$ est un vecteur directeur de la droite

Preuve :

① Si a est le coefficient directeur de (d) alors (d) a pour équation $y = ax + b$

donc (d) a pour équation $-ax + y - b = 0$

et (d) a pour vecteur directeur $\vec{v}(-1;-a)$

ou $\vec{u}(1,a)$

puisque $\vec{u} = -\vec{v}$

donc $\vec{u}$ colinéaire à $\vec{v}$.

② Réciproquement si $\vec{u}(1;a)$ est un vecteur directeur de (d) alors (d) a pour équation

$$ax - y + c = 0$$

ou $y = ax + c$

donc a est le coefficient directeur de (d)

Vérification sur des exemples :

Ex 1 : Si (d) a pour équation $+2x - 5y + 1 = 0$

alors (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}(-b;a)$

càd $\vec{u}(5;2)$

Soit $\vec{v} = \frac{1}{5}\vec{u}$ alors $\vec{v}\left(1;\frac{2}{5}\right)$

alors $\text{Coeff}(d) = \frac{2}{5}$.

On vérifie ceci à partir de l'équation réduite de (d)

$2x - 5y + 1 = 0$

donc $-5y = -2x - 1$

$y = \frac{2}{5}x + \frac{1}{5}$

on a bien $\text{coeff}(d) = \frac{2}{5}$.

Ex 2 : Si (d) a pour coefficient directeur $-\frac{2}{3}$

alors (d) a pour équation $y = -\frac{2}{3}x + b$

qui peut s'écrire $\frac{2}{3}x + y - b = 0$.

On en déduit un vecteur directeur $\vec{u}\left(-1,\frac{2}{3}\right)$

Si on pose $\vec{v} = -\vec{u}$

alors $\vec{v}\left(1,-\frac{2}{3}\right)$

et $\vec{v}$ est aussi un vecteur directeur de (d)

Ex 3 : Si (d) a pour vecteur directeur $\vec{u}\left(1;\frac{5}{3}\right)$

alors (d) a pour équation cartésienne

$\frac{5}{3}x - y + c = 0$

ou $y = \frac{5}{3}x + c$

donc $\text{coeff}(d) = \frac{5}{3}$

$\vec{u}(-b;a)$

$\downarrow$

$a = \frac{5}{3}$

et $b = -1$