Etude de signes

Etudier le signe des fonctions suivantes :

$\boxed{\textbf{1.}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = (3x^2 - x)\mathrm{e}^{-x}$

❶ $3x^2 - x$ est un trinôme avec $a = 3 > 0$.

$3x^2 - x = x(3x - 1)$ donc les racines sont 0 et $\dfrac{1}{3}$

❷ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$

x	$-\infty$		0		$\frac{1}{3}$		$+\infty$
$3x^2 - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	
e^{-x}		$+$		$+$		$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\textbf{2.}}$ Pour $x \neq \dfrac{3}{2}$, $\quad f(x) = \dfrac{2 + x}{3 - 2x}$

❶ $2 + x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1 > 0$

donc $x \mapsto 2 + x$ est une fonction affine croissante

et donc de signe « - 0 + »

$2 + x = 0$ pour $x = -2$

❷ $3 - 2x$ est de la forme $ax + b$ avec $a = -2 < 0$

donc $x \mapsto 3 - 2x$ est une fonction affine décroissante

et donc de signe « + 0 - »

$3 - 2x = 0$ pour $x = \dfrac{3}{2}$

x	$-\infty$		-2		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$2 + x$		$-$	0	$+$		$+$	
$3 - 2x$		$+$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	

$\boxed{\textbf{3.}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, $\quad f(x) = x^4 - 8x^3$

$x^4 - 8x^3 = x^3(x - 8)$

❶ $x^3 > 0 \iff x > 0 \quad$ et $\quad x^3 = 0 \iff x = 0$

❷ $x - 8$ est de la forme $ax + b$ avec $a = 1 > 0$

donc $x \mapsto x - 8$ est une fonction affine croissante

et donc de signe « - 0 + »

$x - 8 = 0$ pour $x = 8$

x	$-\infty$		0		8		$+\infty$
x^3		$-$	0	$+$		$+$	
$x - 8$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\textbf{4.}}$ Pour $x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = \mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x$

$\mathrm{e}^{2x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x(\mathrm{e}^x - 1)$

❶ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^x > 0$

❷ $\mathrm{e}^x - 1 > 0 \iff \mathrm{e}^x > 1 \iff \mathrm{e}^x > \mathrm{e}^0 \iff x > 0$

$\mathrm{e}^x - 1 = 0 \iff \mathrm{e}^x = 1 \iff \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^0 \iff x = 0$

x	$-\infty$		0		$+\infty$
e^x		$+$	|	$+$	
$\mathrm{e}^x - 1$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$-$	0	$+$	

$\boxed{\textbf{5.}}$ Pour $x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = x^2\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-x}$

$x^2\mathrm{e}^{-x} - 5\mathrm{e}^{-x} = \mathrm{e}^{-x}\left(x^2 - 5\right)$

❶ $\forall x \in \mathbb{R}, \quad \mathrm{e}^{-x} > 0$

❷ $x^2 - 5$ est un trinôme avec $a = 1 > 0$.

$x^2 - 5 = 0 \iff x^2 = 5 \iff \left(x = \sqrt{5} \text{ ou } x = -\sqrt{5}\right)$

donc les racines sont $-\sqrt{5}$ et $\sqrt{5}$

x	$-\infty$		$-\sqrt{5}$		$\sqrt{5}$		$+\infty$
e^{-x}		$+$	|	$+$	|	$+$	
$x^2 - 5$		$+$	0	$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\textbf{6.}}$ Pour $x \geqslant 0, \quad f(x) = \dfrac{2\sqrt{x} - x}{-5\mathrm{e}^{1+x^2}}$

❶ $\forall x \geqslant 0, \quad -5\mathrm{e}^{1+x^2} < 0$

car l'exponentielle est toujours positive et ne s'annule pas.

❷ $2\sqrt{x} - x = \sqrt{x}\left(2 - \sqrt{x}\right)$

$\forall x \geqslant 0, \quad \sqrt{x} \geqslant 0 \quad$ et $\quad \sqrt{x} = 0 \iff x = 0$

$\forall x \geqslant 0, \quad 2 - \sqrt{x} > 0 \iff \sqrt{x} < 2 \iff 0 \leqslant x < 4$

$\forall x \geqslant 0, \quad 2 - \sqrt{x} = 0 \iff \sqrt{x} = 2 \iff x = 4$

x	0		4		$+\infty$
$\sqrt{x}$	0	$+$	|	$+$	
$2 - \sqrt{x}$		$+$	0	$-$	
$-5\mathrm{e}^{1+x^2}$		$-$	|	$-$	
$f(x)$	0	$-$	0	$+$	

$\boxed{\textbf{7.}}$ Pour $x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = -2x^4 + 5x^2 - 3$

On a : $\boxed{f(x) = -2X^2 + 5X - 3}$ en posant $\quad X = x^2$

❶ $-2X^2 + 5X - 3$ est un trinôme avec $a = -2 < 0$

1 est une racine évidente (car $-2 + 5 - 3 = 0$)

donc $\quad -2X^2 + 5X - 3$ se factorise par $X - 1$,

on a $\quad -2X^2 + 5X - 3 = (X - 1)(-2X + 3)$

Les deux racines sont donc 1 et $\dfrac{3}{2}$ $\quad$ car $\quad -2X^2 + 5X - 3 = 0 \iff (X - 1)(-2X + 3) = 0$

Remarque : on peut aussi calculer Δ pour trouver les racines.

X	$-\infty$		1		$\frac{3}{2}$		$+\infty$
$-2X^2 + 5X - 3$		$-$	0	$+$	0	$-$	

❷ On a donc :

$$f(x) > 0 \iff -2X^2+5X-3>0 \iff 1<X<\frac{3}{2} \iff 1<x^2<\frac{3}{2} \iff 1<x<\sqrt{\frac{3}{2}} \quad \text{ou} \quad -\sqrt{\frac{3}{2}}<x<-1$$

$$f(x)=0 \iff -2X^2+5X-3=0 \iff X=1 \text{ ou } X=\frac{3}{2} \iff x^2=1 \text{ ou } x^2=\frac{3}{2} \iff x=\pm 1 \text{ ou } x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}}$$

Ce que l'on résume dans le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		$-\sqrt{\frac{3}{2}}$		-1		1		$\sqrt{\frac{3}{2}}$		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	0	$+$	0	$-$	

$\boxed{\textbf{8.}}$ Pour $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \mathrm{e}^{4x} + \mathrm{e}^{2x} - 2$

❶ On a : $\boxed{f(x) = X^2 + X - 2}$ en posant $X = \mathrm{e}^{2x}$

X^2+X-2 est un trinôme avec $a = 1 > 0$

1 est une racine évidente (car $1+1-2=0$)

donc X^2+X-2 se factorise par $X-1$.

On a donc : $X^2+X-2 = (X-1)(X+2)$.

X	$-\infty$		-2		1		$+\infty$
X^2+X-2		$+$	0	$-$	0	$+$	

On en déduit alors que les deux racines sont 1 et -2 car $X^2+X-2=0 \iff (X-1)(X+2)=0 \iff (X=1 \text{ ou } X=-2)$

Remarque : on peut aussi calculer Δ pour trouver les racines.

❷ On a donc :

$$f(x)>0 \iff X^2+X-2>0 \iff X<-2 \text{ ou } X>1 \iff \mathrm{e}^{2x}<-2 \text{ ou } \mathrm{e}^{2x}>1 \iff \mathrm{e}^{2x}>1 \iff \mathrm{e}^{2x}>\mathrm{e}^0 \iff 2x>0 \iff x>0$$

$$f(x)=0 \iff X^2+X-2=0 \iff X=-2 \text{ ou } X=1 \iff \mathrm{e}^{2x}=-2 \text{ ou } \mathrm{e}^{2x}=1 \iff \mathrm{e}^{2x}=\mathrm{e}^0 \iff 2x=0 \iff x=0$$

Ce que l'on résume dans le tableau de signes suivant :

x	$-\infty$		0		$+\infty$
$f(x)$		$-$	0	$+$	