Etudes des variations d'une suite

Exercice 1

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = w_n \mathrm{e}^{-w_n}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$. (une récurrence facile permet de le démontrer)

Etudier le sens de variation de la suite (w_n).

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1\ 000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1\ 000$.
2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 90$ et pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \dfrac{2}{5}$ et pour tout $n \geqslant 1$ par $u_{n+1} = \dfrac{1}{5}u_n + \dfrac{2}{5}$

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\dfrac{1}{2}$.
2. Démontrer que (u_n) est croissante.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.
2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Exercice 6 **Etude de la suite (u_n) donnée dans l'exercice 5 à l'aide d'une fonction**

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.
2. Démontrer que si $x \in [0\ ,\ 1]$ alors $f(x) \in [0\,;1]$.

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$

1. Déduire de la **partie A** que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.
2. Déduire de la **partie A** que la suite (u_n) est croissante.