Etudes des variations d'une suite

Exercice 1

On considère la suite (w_n) définie par $w_0 = 1$ et, pour tout entier naturel n, $w_{n+1} = w_n e^{-w_n}$.

On admet que pour tout entier naturel n, $w_n > 0$. (une récurrence facile permet de le démontrer)

Etudier le sens de variation de la suite (w_n).

Pour cela, on va chercher le signe de $w_{n+1} - w_n$

On a : $w_{n+1} - w_n = w_n e^{-w_n} - w_n = \boxed{w_n \left(e^{-w_n} - 1\right)}$

On sait que : $w_n > 0$ donc $-w_n < 0$ donc $e^{-w_n} < e^0$ soit $e^{-w_n} < 1$ et donc $e^{-w_n} - 1 < 0$

On en déduit donc que pour tout entier naturel n, $w_n \left(e^{-w_n} - 1\right) < 0$ soit $w_{n+1} - w_n < 0$ et donc (w_n) est (strictement) décroissante.

Exercice 2

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 1\ 000$ et, pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = 1,2u_n - 100$.

1. Démontrer par récurrence que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\boxed{u_n \geqslant 1\ 000}$.

❶ **Initialisation** :

$u_0 = 1\ 000$ donc $\boxed{u_0 \geqslant 1\ 000}$. La propriété est vraie pour $n = 0$

❷ **Hérédité :**

Soit $n \geqslant 0$, fixé quelconque, tel que $u_n \geqslant 1\ 000$. On va démontrer que $u_{n+1} \geqslant 1\ 000$.

On a : $u_n \geqslant 1\ 000$

donc $1,2 \times u_n \geqslant 1,2 \times 1\ 000$

puis $1,2 \times u_n - 100 \geqslant 1\ 200 - 100$

soit $u_{n+1} \geqslant 1\ 100$ et donc $\boxed{u_{n+1} \geqslant 1\ 000}$

❸ **Conclusion** :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on a démontré que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \geqslant 1\ 000$

2. Démontrer que la suite (u_n) est croissante.

Pour cela, on va démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

On a : $u_{n+1} - u_n = 1,2u_n - 100 - u_n = \boxed{0,2u_n - 100}$

On sait que $u_n \geqslant 1\ 000$

donc $0,2u_n \geqslant 0,2 \times 1\ 000$

soit $0,2u_n \geqslant 200$

puis $0,2u_n - 100 \geqslant 100$

c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 100$ donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$ et donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 3

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = 90$ et pour tout entier naturel n, $\quad u_{n+1} = 0,85u_n + 6$.

Démontrer par récurrence que la suite (u_n) est décroissante.

On doit donc démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, on a : $\quad u_{n+1} \leqslant u_n$.

❶ **Initialisation** :

$u_0 = 90 \quad$ et $u_1 = 0,85u_0 + 6 = 0,85 \times 90 + 6 = 82,5 \quad$ donc $\boxed{u_1 \leqslant u_0}$.

La propriété est vraie pour $n = 0$

❷ **Hérédité :**

Soit $n \geqslant 0$, fixé quelconque, tel que $u_{n+1} \leqslant u_n$. On va démontrer que $u_{n+2} \leqslant u_{n+1}$.

On a : $\quad u_{n+1} \leqslant u_n$

donc $\quad 0,85 \times u_{n+1} \leqslant 0,85 \times u_n$

puis $\quad 0,85 \times u_{n+1} + 6 \leqslant 0,85 \times u_n + 6$

c'est-à-dire $\quad \boxed{u_{n+2} \leqslant u_{n+1}}$

❸ **Conclusion** :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on a démontré que pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} \leqslant u_n}$

et donc que la suite (u_n) est décroissante.

Exercice 4

On considère la suite (u_n) définie par : $u_1 = \frac{2}{5}$ et pour tout $n \geqslant 1$ par $u_{n+1} = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5}$

1. Démontrer que la suite (u_n) est majorée par $\frac{1}{2}$.

Pour cela, on va démontrer que pour tout entier naturel n, $u_n \leqslant \frac{1}{2}$.

On va faire cette démonstration à l'aide d'un raisonnement par récurrence

❶ **Initialisation** :

⚠ $u_1 = \frac{2}{5} = \frac{4}{10}$ et $\frac{1}{2} = \frac{5}{10}$ donc $\boxed{u_1 < \frac{1}{2}}$ La propriété est vraie pour $n = 1$

❷ **Hérédité :**

Soit $n \geqslant 1$, fixé quelconque, tel que $u_n < \frac{1}{2}$. On va démontrer que $u_{n+1} < \frac{1}{2}$

On a : $u_n < \frac{1}{2}$

donc $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{5} \times \frac{1}{2}$

soit $\frac{1}{5}u_n < \frac{1}{10}$

puis $\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} < \frac{1}{10} + \frac{2}{5}$

soit $\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} < \frac{5}{10}$

donc $\frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} < \frac{1}{2}$ soit $\boxed{u_{n+1} < \frac{1}{2}}$

❸ **Conclusion** :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on a démontré que pour tout entier naturel $n \geqslant 1$, $\boxed{u_n < \frac{1}{2}}$.

2. Démontrer que (u_n) est croissante.

Pour cela, on va démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$

On a : $u_{n+1} - u_n = \frac{1}{5}u_n + \frac{2}{5} - u_n = \boxed{-\frac{4}{5}u_n + \frac{2}{5}}$

On sait que $u_n \leqslant \frac{1}{2}$

donc $-\frac{4}{5}u_n \geqslant -\frac{4}{5} \times \frac{1}{2}$

soit $-\frac{4}{5}u_n \geqslant \frac{-2}{5}$

puis $-\frac{4}{5}u_n + \frac{2}{5} \geqslant \frac{-2}{5} + \frac{2}{5}$

c'est-à-dire $u_{n+1} - u_n \geqslant 0$ donc $\boxed{u_{n+1} - u_n \geqslant 0}$ et donc la suite (u_n) est croissante.

Exercice 5

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$

1. Démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

❶ **Initialisation** :

$u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{0 < u_0 < 1}$. La propriété est vraie pour $n = 0$

❷ **Hérédité :**

Soit $n \geqslant 0$, fixé quelconque, tel que $0 < u_n < 1$. On va démontrer que $0 < u_{n+1} < 1$.

Remarque : comme u_n intervient au numérateur et au dénominateur de u_{n+1}, on ne peut pas partir de $0 < u_n < 1$ pour ariver à u_{n+1} par des opérations sur les inégalités.

Pour démontrer $0 < u_{n+1} < 1$, on va démontrer que $0 < u_{n+1}$ et $u_{n+1} < 1$ ce que l'on fera en démontrant que $u_{n+1} - 1 < 0$.

- D'après l'hypothèse de récurrence $(0 < u_n < 1)$, on a $u_n > 0$ et donc $\dfrac{3u_n}{1+2u_n} > 0$ soit $\boxed{u_{n+1} > 0}$.
- $u_{n+1} - 1 = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - 1 = \dfrac{3u_n - (1+2u_n)}{1+2u_n} = \dfrac{u_n - 1}{1+2u_n}$

  D'après l'hypothèse de récurrence $(0 < u_n < 1)$, on a :

  $u_n < 1$ donc $u_n - 1 < 0$

  $u_n > 0$ donc $1 + 2u_n > 0$.

  On en conclut donc que $\dfrac{u_n - 1}{1+2u_n} < 0$ c'est-à-dire $u_{n+1} - 1 < 0$ et donc $\boxed{u_{n+1} < 1}$

  On a donc bien démontré que $\boxed{0 < u_{n+1} < 1}$.

❸ **Conclusion** :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on a démontré que pour tout entier naturel n, $\boxed{0 < u_n < 1}$.

2. En déduire que la suite (u_n) est croissante.

Pour cela, on va démontrer que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} - u_n$ est positif.

On a : $u_{n+1} - u_n = \dfrac{3u_n}{1+2u_n} - u_n = \dfrac{3u_n - u_n(1+2u_n)}{1+2u_n} = \dfrac{2u_n - 2u_n^2}{1+2u_n} = \boxed{\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n}}$

On sait que $u_n > 0$ et $u_n < 1$ donc $1 - u_n > 0$ et par conséquent $\dfrac{2u_n(1-u_n)}{1+2u_n} > 0$

c'est-à-dire $\boxed{u_{n+1} - u_n > 0}$ et donc la suite (u_n) est croissante. (strictement croissante)

Exercice 6

Partie A

Soit la fonction f définie sur $[0\,;+\infty[$ par $f(x) = \dfrac{3x}{1+2x}$.

1. Etudier les variations de f sur $[0\,;+\infty[$.

$f'(x) = \dfrac{3(1+2x) - 3x \times 2}{(1+2x)^2} = \dfrac{3}{(1+2x)^2} > 0$

La fonction f est donc strictement croissante sur $[0\,;+\infty[$.

2. Démontrer que si $x \in [0\ ,\ 1]$ alors $f(x) \in [0\,;\,1]$.

Si $x \in [0\ ,\ 1]$ alors $0 \leqslant x \leqslant 1$ et f étant croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a $f(0) \leqslant f(x) \leqslant f(1)$

avec $f(0) = 0$ et $f(1) = \dfrac{3}{3} = 1$ donc on a $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$

Remarque : on dit alors que l'intervalle $[0\,;\,1]$ est stable par f

Partie B

On considère la suite (u_n) définie par $u_0 = \dfrac{1}{2}$ et telle que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} = \dfrac{3u_n}{1+2u_n}$

1. Déduire de la **partie A** que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$.

La suite (u_n) et la fonction f sont liées par la relation $\boxed{u_{n+1} = f(u_n)}$

On démontre par récurrence que pour tout entier naturel n, $0 < u_n < 1$

❶ **Initialisation** :

$u_0 = \dfrac{1}{2}$ donc $\boxed{0 < u_0 < 1}$. La propriété est vraie pour $n = 0$

❷ **Hérédité :**

Soit $n \geqslant 0$, fixé quelconque, tel que $0 < u_n < 1$. On va démontrer que $0 < u_{n+1} < 1$.

On a : $0 < u_n < 1$, donc $u_n \in [0\ ,\ 1]$ et donc d'après la **partie A**, $f(u_n) \in [0\ ,\ 1]$ soit $u_{n+1} \in [0\ ,\ 1]$

On a donc bien démontré que $\boxed{0 < u_{n+1} < 1}$

❸ **Conclusion** :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on a démontré que pour tout entier naturel n, $\boxed{0 < u_n < 1}$

2. Déduire de la **partie A** que la suite (u_n) est croissante.

Pour cela, on va démontrer par récurrence que pour tout entier naturel n, $u_{n+1} \geqslant u_n$

❶ **Initialisation** :

$$u_1 = f(u_0) = f\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{\frac{3}{2}}{2} = \frac{3}{4}$$

$u_0 = \dfrac{1}{2} = \dfrac{2}{4}$ donc $u_1 \geqslant u_0$ La propriété est donc vraie pour $n = 0$.

❷ **Hérédité :**

Soit $n \geqslant 0$, fixé quelconque, tel que $u_{n+1} \geqslant u_n$. On va démontrer que $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$.

On a : $u_{n+1} \geqslant u_n$.

La fonction f étant croissante sur $[0\,;\,+\infty[$, on a donc $f(u_{n+1}) \geqslant f(u_n)$ soit $u_{n+2} \geqslant u_{n+1}$

❸ **Conclusion** :

D'après le principe de raisonnement par récurrence, on a démontré que pour tout entier naturel n, $\boxed{u_{n+1} \geqslant u_n}$

ce qui prouve que la suite (u_n) est croissante.