Fonction exponentielle

Exercice 1 a désigne un nombre réel. Simplifier les expressions suivantes :

1. $A = (2\mathrm{e}^{a})^3 \times \mathrm{e}^{-a} = 8\mathrm{e}^{3a} \times \mathrm{e}^{-a} = \boxed{8\mathrm{e}^{2a}}$

2. $B = \dfrac{\mathrm{e}^{2a}+1}{\mathrm{e}^{1-a}} = \dfrac{\mathrm{e}^{2a}}{\mathrm{e}^{1-a}} + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{1-a}} = \mathrm{e}^{2a-1+a} + \mathrm{e}^{-1+a} = \boxed{\mathrm{e}^{3a-1} + \mathrm{e}^{a-1}}$

3. $C = \left(\mathrm{e}^{-a+1}\right)^2 \times \mathrm{e} = \mathrm{e}^{-2a+2} \times \mathrm{e}^{1} = \boxed{\mathrm{e}^{-2a+3}}$

Exercice 2 Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

1. $f(x) = x\mathrm{e}^{\frac{1}{x}+2}$

$f(x)$ est de la forme $u(x)v(x)$ avec $v(x)$ de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$

On utilise donc les formules de dérivation $(uv)' = u'v + uv'$ et $(\mathrm{e}^{u})' = \mathrm{e}^{u} \times u'$

$$f'(x) = 1 \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}+2} + x \times \mathrm{e}^{\frac{1}{x}+2} \times \frac{-1}{x^2} = \boxed{\mathrm{e}^{\frac{1}{x}+2}\left(1 - \frac{1}{x}\right)}$$

2. $f(x) = \dfrac{\mathrm{e}^{x^2+x}}{x}$

$f(x)$ est de la forme $\dfrac{u(x)}{v(x)}$ avec $u(x)$ de la forme $\mathrm{e}^{u(x)}$

On utilise donc les formules de dérivation $\left(\dfrac{u}{v}\right)' = \dfrac{u'v - uv'}{v^2}$ et $(\mathrm{e}^{u})' = \mathrm{e}^{u} \times u'$

$$f'(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2+x} \times (2x+1) \times x - \mathrm{e}^{x^2+x} \times 1}{x^2} = \boxed{\frac{\mathrm{e}^{x^2+x}(2x^2+x-1)}{x^2}}$$

3. $f(x) = \dfrac{3\mathrm{e}}{1+\mathrm{e}^{4x}} = 3\mathrm{e} \times \dfrac{1}{1+\mathrm{e}^{4x}}$

$f(x)$ est de la forme $ku(x)$ avec $u(x)$ de la forme $\dfrac{1}{u(x)}$

On utilise donc les formules de dérivation $(ku)' = k \times u'$ et $\left(\dfrac{1}{u}\right)' = \dfrac{-u'}{u^2}$

$$f'(x) = 3\mathrm{e} \times \frac{-\mathrm{e}^{4x} \times 4}{(1+\mathrm{e}^{4x})^2} = \boxed{\frac{-12\mathrm{e}^{4x+1}}{(1+\mathrm{e}^{4x})^2}}$$

4. $f(x) = 4\,(1+\mathrm{e}^{x})^3$

$f(x)$ est de la forme $ku(x)$ avec $u(x)$ de la forme $(u(x))^3$

On utilise donc les formules de dérivation $(ku)' = k \times u'$ et $\left(u^3\right)' = 3u^2 \times u'$

$$f'(x) = 4 \times 3\,(1+\mathrm{e}^{x})^2 \times \mathrm{e}^{x} = \boxed{12\mathrm{e}^{x}\,(1+\mathrm{e}^{x})^2}$$

Exercice 3 En utilisant $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty$, démontrer que $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0$

Aide : quand $x \longrightarrow -\infty$, $-x \longrightarrow +\infty$, il sera donc intéressant de considérer le changement de variable $\boxed{X=-x}$

On a : $x\mathrm{e}^x = \dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}} = -\dfrac{-x}{\mathrm{e}^{-x}} = -\dfrac{X}{\mathrm{e}^X}$

On a donc : $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = \lim\limits_{X\to+\infty} -\dfrac{X}{\mathrm{e}^X} = 0$

Exercice 4 Calculer les limites suivantes :

On pourra utiliser si besoin les F.I. à connaitre suivantes : $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$; $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0}$

$\boxed{1}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{e}^{3x} \longrightarrow +\infty \\ \\ \mathrm{e}^{x} \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \text{ F.I. du type } +\infty-\infty$$

On a $\mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x = \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right)$

❶ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x = +\infty$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{2x} - 1 = +\infty$

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^x\left(\mathrm{e}^{2x}-1\right) = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \mathrm{e}^{3x} - \mathrm{e}^x = +\infty}$

$\boxed{2}$ $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x - 1}{x+2}$

F.I. du type $\dfrac{+\infty}{+\infty}$ $\qquad \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x+2} = \dfrac{\mathrm{e}^x\left(1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}\right)}{x\left(1+\dfrac{2}{x}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{2}{x}}$

❶ On sait que $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} = +\infty}$

❷ $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^x} = 1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} 1 + \dfrac{2}{x} = 1$ donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{2}{x}} = 1$

❸ Conclusion : $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x}{x} \times \dfrac{1-\dfrac{1}{\mathrm{e}^x}}{1+\dfrac{2}{x}} = +\infty$ donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\mathrm{e}^x-1}{x+2} = +\infty}$

$\boxed{3}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-x}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} \mathrm{e}^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} \mathrm{e}^X = +\infty$ $\qquad$ donc $\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^{-x} = -\infty$

$\boxed{4}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x}$

On sait que $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} x\mathrm{e}^x = 0^-}$ car $x\mathrm{e}^x < 0$ au voisinage de $-\infty$

donc $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{1}{x\mathrm{e}^x} = -\infty$ et donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{\mathrm{e}^{-x}}{x} = -\infty}$

$\boxed{5}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} x + \mathrm{e}^{-x}$

$$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow -\infty \\ \\ \mathrm{e}^{-x} \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \quad \text{donc F.I. du type} \quad -\infty + \infty$$

On a : $x + \mathrm{e}^{-x} = x + \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x}} = \dfrac{x\mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{x}}$

On sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} x\mathrm{e}^{x} + 1 \longrightarrow 1 \\ \\ \mathrm{e}^{x} \longrightarrow 0^{+} \end{array}\right\} \quad \lim_{x \to -\infty} \frac{x\mathrm{e}^{x} + 1}{\mathrm{e}^{x}} = +\infty \quad \text{donc} \quad \lim_{x \to -\infty} x + \mathrm{e}^{-x} = +\infty$$

$\boxed{6}$ $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{x\mathrm{e}^{-x} - x}{\mathrm{e}^{-x} + x}$

$$\left.\begin{array}{l} x \longrightarrow -\infty \\ \\ \mathrm{e}^{-x} \longrightarrow +\infty \end{array}\right\} \quad x\mathrm{e}^{-x} \longrightarrow -\infty \quad \text{donc} \quad x\mathrm{e}^{-x} - x \quad \text{donne une F.I.}$$

Remarque : la factorisation par x au numérateur et dénominateur ne permet pas de répondre.

On va donc factoriser par e^{-x} : $\dfrac{x\mathrm{e}^{-x} - x}{\mathrm{e}^{-x} + x} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\left(x - \dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}}\right)}{\mathrm{e}^{-x}\left(1 + \dfrac{x}{\mathrm{e}^{-x}}\right)} = \dfrac{\mathrm{e}^{-x}\left(x - x\mathrm{e}^{x}\right)}{\mathrm{e}^{-x}\left(1 + x\mathrm{e}^{x}\right)} = \dfrac{x - x\mathrm{e}^{x}}{1 + x\mathrm{e}^{x}}$

On sait que $\boxed{\lim\limits_{x \to -\infty} x\mathrm{e}^{x} = 0}$

$$\left.\begin{array}{l} x - x\mathrm{e}^{x} \longrightarrow -\infty \\ \\ 1 + x\mathrm{e}^{x} \longrightarrow 1 \end{array}\right\} \quad \frac{x - x\mathrm{e}^{x}}{1 + x\mathrm{e}^{x}} \longrightarrow -\infty \qquad \text{donc} \quad \boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{x\mathrm{e}^{-x} - x}{\mathrm{e}^{-x} + x} = -\infty}$$

$\boxed{7}$ $\lim\limits_{x \to -2^{+}} \dfrac{\mathrm{e}^{x} + 1}{x + 2}$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{e}^{x} + 1 \longrightarrow \mathrm{e}^{-2} + 1 > 0 \\ \\ x + 2 \longrightarrow 0^{+} \\ \\ \text{car} \quad x > -2 \quad \text{donc} \quad x + 2 > 0 \end{array}\right\} \quad \boxed{\lim_{x \to -\infty} \frac{\mathrm{e}^{x} + 1}{x + 2} = +\infty}$$