Représentations paramétriques d'un plan dans l'espace

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O},\ \overrightarrow{\imath},\ \overrightarrow{\jmath},\ \overrightarrow{k}\right)$ orthonormé.

Ex 1 Soient trois points $A\ (1\,;1\,;-2)$, $B\ (1\,;2\,;-1)$ et $C\ (3\,;1\,;4)$.

1. Démontrer que les points A, B et C définissent un plan.

Il faut vérifier que les points A, B et C ne sont pas alignés.

$\overrightarrow{AB}\ (0\,;1\,;1)$ et $\overrightarrow{AC}\ (2\,;0\,;6)$.

Ces deux vecteurs ne sont pas colinéaires donc les points ne sont pas alignés et déterminent un plan que l'on note (ABC).

2. Déterminer une représentation paramétrique du plan (ABC).

Les vecteurs $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont deux vecteurs directeurs du plan (ABC) (car vecteurs non colinéaires).

Le plan (ABC) a pour représentation paramétrique (par exemple, en considérant le point A) $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 1+2t \\ y & = & 1+k \\ z & = & -2+k+6t \end{array}\right.,\ k,t\in\mathbb{R}$.

Ex 2 Soit la droite (d) passant par $M\ (4\,;1\,;0)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\ (2\,;-5\,;11)$

et le plan $\mathcal{P}$ de représentation paramétrique $\left\{\begin{array}{lcl} x & = & 3+2k-t \\ y & = & 3k+4t \\ z & = & -5+k+2t \end{array}\right.,\ k,t\in\mathbb{R}$.

1. Le point $B\ (1\,;-2\,;1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

Le point B appartient au plan $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient le système de représentation paramétrique du plan c'est-à-dire si le système $\left\{\begin{array}{lcl} 3+2k-t & = & 1 \\ 3k+4t & = & -2 \\ -5+k+2t & = & 1 \end{array}\right.$ a une solution pour k et t.

• Le système s'écrit $\left\{\begin{array}{lcl} 2k-t & = & -2 \\ 3k+4t & = & -2 \\ k+2t & = & 6 \end{array}\right.$

• On commence par résoudre le système formé des deux premières équations $\left\{\begin{array}{lcl} 2k-t & = & -2 \\ 3k+4t & = & -2 \end{array}\right.$

On multiplie la première équation par 4, le système devient $\left\{\begin{array}{lcl} 8k-4t & = & -8 \\ 3k+4t & = & -2 \end{array}\right.$.

Par addition des deux lignes on obtient $11k = -10$ et donc $k = \dfrac{-10}{11}$.

Par substitution de k par $\dfrac{-10}{11}$ dans la première équation $2k - t = -2$, on en déduit $t = 2k + 2 = \dfrac{-20}{11} + 2 = \dfrac{2}{11}$.

• On regarde si les valeurs $k = \dfrac{-10}{11}$ et $t = \dfrac{2}{11}$ conviennent, c'est-à-dire si elles vérifient la troisième équation.

On a : $k + 2t = \dfrac{-10}{11} + \dfrac{4}{11} = \dfrac{-6}{11} \neq 6$

donc le système de départ n'a pas solution pour k et t et cela prouve que le point B n'appartient pas au plan.

2. Donner deux vecteurs directeurs de $\mathcal{P}$.

Par lecture du système de représentation paramétrique du plan, on en déduit deux vecteurs directeurs $\overrightarrow{u}\ (2\,;3\,;1)$ (coefficients du paramètre k) et $\overrightarrow{v}\ (-1\,;4\,;2)$ (coefficients du paramètre t) .

3. Démontrer que la droite (d) est perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

Pour montrer qu'une droite est perpendiculaire (ou orthogonale) à un plan, il suffit de montrer qu'elle est orthogonale à deux droites sécantes du plan, ce qui en terme de vecteurs revient à démontrer qu'un vecteur directeur de la droite est orthogonale à deux vecteurs non colinéaires du plan.

Vecteur directeur de la droite (d) : $\overrightarrow{w}\ (2\,;-5\,;11)$

Vecteurs non colinéaires du plan : $\overrightarrow{u}\ (2\,;3\,;1)$ et $\overrightarrow{v}\ (-1\,;4\,;2)$.

On a : $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{u} = 4 - 15 + 11 = 0$ donc $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{u}$

On a : $\overrightarrow{w} \cdot \overrightarrow{v} = -2 - 20 + 22 = 0$ donc $\overrightarrow{w} \perp \overrightarrow{v}$

Conclusion : la droite (d) est donc perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$.

4. Déduire de la question précédente une équation du plan $\mathcal{P}$.

• La droite (d) étant perpendiculaire au plan $\mathcal{P}$, on en déduit que le vecteur $\overrightarrow{w}\ (2\,;-5\,;11)$ (vecteur directeur de la droite) est normal au plan.

Le plan $\mathcal{P}$ a donc une équation cartésienne du type $2x - 5y + 11z + d = 0$

• Pour déterminer la valeur de d, on utilise un point du plan $\mathcal{P}$ que l'on déduit du système de représentation paramétrique du plan. Soit le point $T\ (3\,;0\,;-5)$ (pour $k = 0$ et $t = 0$).

Les coordonnées de T vérifient l'équation cartésienne du plan donc $6 - 0 - 55 + d = 0$ et donc $d = 49$.

Conclusion : le plan $\mathcal{P}$ a pour équation cartésienne $\boxed{2x - 5y + 11z + 49 = 0}$.

• Vérification :
$$\begin{aligned} 2x - 5y + 11z - 49 &= 2(3 + 2k - t) - 5(3k + 4t) + 11(-5 + k + 2t) - 49 \\ &= 6 + 4k - 2t - 15k - 20t - 55 + 11k + 22t + 49 \\ &= 0 \end{aligned}$$