290420.

Distance dans l'espace

Ex1 $\mathcal{P}$: $-x+2y+3z-11=0$

1) $\vec{n}(-1,2,3)$ est normal à $\mathcal{P}$.
(d) $\perp$ $\mathcal{P}$ donc $\vec{n}$ est un vecteur directeur de (d)
(d) passe par $A(2,-3,4)$ donc (d) a pour représentation paramétrique

$$\boxed{\begin{cases} x = 2-k \\ y = -3+2k \\ z = 4+3k \end{cases} \quad k \in \mathbb{R}}$$

2) a) H est le point d'intersection de $\mathcal{P}$ avec (d)
donc on résout

$$-(2-k)+2(-3+2k)+3(4+3k)-11=0$$
$$-2+k-6+4k+12+9k-11=0.$$
$$-8+5k+1+9k=0$$
$$14k=7$$
$$\boxed{k=\frac{1}{2}}$$

donc $x = 2-k = 2-\frac{1}{2} = \frac{3}{2}$

$y = -3+2k = -3+1 = -2$

$z = 4+3k = 4+\frac{3}{2} = \frac{11}{2}$ $\boxed{H\left(\frac{3}{2};-2;\frac{11}{2}\right)}$

Vérification : $-\frac{3}{2}-4+\frac{33}{2}-11 = -15+\frac{30}{2} = 0$
donc $H \in \mathcal{P}$.

b) On a donc $dist(A,\mathcal{P}) = AH$

$$= \sqrt{\left(\frac{3}{2}-2\right)^2+(-2+3)^2+\left(\frac{11}{2}-4\right)^2}$$
$$= \sqrt{\left(-\frac{1}{2}\right)^2+1^2+\left(\frac{3}{2}\right)^2}$$
$$= \sqrt{\frac{1}{4}+1+\frac{9}{4}} = \sqrt{\frac{14}{4}}$$
$$= \boxed{\frac{\sqrt{14}}{2}}$$

(2)

Ex 2 $A(-1,2,3)$
(d) de représentation paramétrique

$$\begin{cases} x = 9+4t \\ y = 6+t \\ z = 2+2t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}$$

<u>Méthode 1</u> : 1) $\vec{u}(4,1,2)$ vecteur directeur de (d)
(d) $\perp$ $\mathcal{P}$ donc $\vec{u}$ est un vecteur normal à $\mathcal{P}$.
$\mathcal{P}$ a pour équation $4x+y+2z+d=0$
$A \in \mathcal{P}$ donc $-4+2+6+d=0$
$d=-4$

$\mathcal{P}$: $\boxed{4x+y+2z-4=0}$

<u>Autre méthode</u> : $M(x,y,z) \in \mathcal{P}$ | $\vec{AM}(x+1, y-2, z-3)$

$\iff \vec{AM} \cdot \vec{u} = 0$
$\iff 4(x+1)+y-2+2(z-3)=0$
$\iff 4x+4+y-2+2z-6=0$
$\iff 4x+y+2z-4=0.$

2) a) H point d'intersection de (d) avec $\mathcal{P}$
donc on résout

$$4(9+4t)+6+t+2(2+2t)-4=0$$
$$36+16t+6+t+\cancel{4}+4t-\cancel{4}=0$$
$$21t+42=0$$
$$t=-2$$

donc $x = 9+4t = 9-8 = 1$
$y = 6+t = 6-2 = 4$
$z = 2+2t = 2-4 = -2$ $\boxed{H(1,4,-2)}$

Vérification $4+4-4-4=0$ donc $H \in \mathcal{P}$.

b) $dist(A,(d)) = AH = \sqrt{(1+1)^2+(4-2)^2+(-2-3)^2}$

$$= \sqrt{2^2+2^2+(-5)^2}$$
$$= \sqrt{4+4+25} = \boxed{\sqrt{33}}$$

Méthode 2

1) $M \in (d)$ donc $M(9+4t\,;\,6+t\,;\,2+2t)$ avec $t \in \mathbb{R}$

$A(-1,2,3)$

donc $AM = \sqrt{(9+4t+1)^2+(6+t-2)^2+(2+2t-3)^2}$

$= \sqrt{(10+4t)^2+(4+t)^2+(2t-1)^2}$

$= \sqrt{100+80t+16t^2+16+8t+t^2+4t^2-4t+1}$

$= \sqrt{21t^2+84t+117}$.

donc $\boxed{AM^2 = 21t^2+84t+117}$

2) On note $f(t) = 21t^2+84t+117$ avec $t \in \mathbb{R}$

On cherche le minimum de f sur $\mathbb{R}$

$f'(t) = 42t+84$

$f'(t) = 0 \iff 42t+84 = 0$
$\iff t = -2$

$f'(t) > 0 \iff 42t+84 > 0$
$\iff 42t > -84$
$\iff t > -2$

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
$f'(t)$		$-$	0	$+$	
$f(t)$		$\searrow$		$\nearrow$	

le minimum de f sur $\mathbb{R}$ est atteint pour $t=-2$

et vaut $f(-2) = 21(-2)^2+84\times(-2)+117$
$= 84-168+117$
$= 201-168$
$= 33$.

donc AM^2 est minimal pour $t=-2$
et le minimum est égal à 33
donc AM est minimal pour $t=-2$
et le minimum est égal à $\sqrt{33}$

En effet

t	$-\infty$		-2		$+\infty$
AM^2		$\searrow$	33	$\nearrow$	
$AM=\sqrt{AM^2}$		$\searrow$	$\sqrt{33}$	$\nearrow$	

car la fonction racine carrée est croissante donc
si $AM^2 \nearrow$ $\sqrt{AM^2} \nearrow$
si $AM^2 \searrow$ $\sqrt{AM^2} \searrow$