Equations cartésiennes d'un plan dans l'espace

L'espace est muni d'un repère $\left(\mathrm{O}, \ \vec{\imath}, \ \vec{\jmath}, \ \vec{k}\right)$ orthonormé.

Ex 1

Soit la droite (d) de représentation paramétrique $\begin{cases} x = 1+k \\ y = 4-k \\ z = -2+2k \end{cases}, k \in \mathbb{R}$

et le plan $\mathcal{P}$ d'équation cartésienne $2x - y + 4z + 1 = 0$

1. Le point A de coordonnées $(3\,;\,5\,;\,-1)$ appartient-il à $\mathcal{P}$?

Le point A appartient au plan $\mathcal{P}$ si ses coordonnées vérifient l'équation du plan.

On a : $2x - y + 4z + 1 = 6 - 5 - 4 + 1 = -2 \neq 0$ donc A n'appartient pas au plan.

2. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}$.

On déduit directement à partir de l'équation cartésienne du plan que le vecteur $\vec{n}\ (2\,;\,-1\,;\,4)$ est normal au plan.

3. A l'aide du vecteur normal trouvé précédemment, démontrer que la droite (d) coupe le plan $\mathcal{P}$.

Pour démontrer que la droite (d) coupe le plan, il suffit de montrer que la droite n'est pas parallèle au plan.

Pour cela, il suffit de vérifier qu'un vecteur directeur de (d) n'est pas orthogonal au vecteur $\vec{n}$.

Vecteur directeur de (d) : $\vec{u}\ (1\,;\,-1\,;\,2)$ (coefficients du paramètre k).

On a : $\vec{u} \cdot \vec{n} = 2 + 1 + 8 = 11 \neq 0$ donc les vecteurs ne sont pas orthogonaux et la droite (d) coupe donc le plan $\mathcal{P}$.

4. Calculer les coordonnées de leur point d'intersection.

Le point d'intersection appartient à la fois à $\mathcal{P}$ et à la droite (d) donc ses coordonnées vérifient la représentation paramétrique de (d) et l'équation de $\mathcal{P}$.

Par substitution de x, y et z dans l'équation du plan, on a $2(1+k) - (4-k) + 4(-2+2k) + 1 = 0$.

donc $2 + 2k - 4 + k - 8 + 8k + 1 = 0$ et donc $11k - 9 = 0$ et donc $\boxed{k = \dfrac{9}{11}}$

On en déduit alors $x = 1 + k = 1 + \dfrac{9}{11} = \dfrac{20}{11}$; $\quad y = 4 - k = 4 - \dfrac{9}{11} = \dfrac{35}{11} \quad$ et $\quad z = -2 + 2k = -2 + \dfrac{18}{11} = \dfrac{-4}{11}$

Conclusion : le point d'intersection a pour coordonnées $\boxed{\left(\dfrac{20}{11}\,;\,\dfrac{35}{11}\,;\,\dfrac{-4}{11}\right)}$

Ex 2 Soit le plan $\mathcal{P}_1$ d'équation $-x + 6y + z - 1 = 0$ et le plan $\mathcal{P}_2$ d'équation $2x - 5y + 3z - 2 = 0$

1. Déterminer un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_1$ et un vecteur normal au plan $\mathcal{P}_2$ puis en déduire que les plans sont sécants.

Vecteur normal à $\mathcal{P}_1$: $\vec{n_1}\ (-1\,;\,6\,;\,1)$

Vecteur normal à $\mathcal{P}_2$: $\vec{n_2}\ (2\,;\,-5\,;\,3)$

Deux plans sont sécants s'ils ne sont pas parallèles.

$\mathcal{P}_1$ et $\mathcal{P}_2$ ne sont pas parallèles si $\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires.

$\overrightarrow{n_1}$ et $\overrightarrow{n_2}$ ne sont pas colinéaires car $\dfrac{-1}{2} \neq \dfrac{6}{-5}$, donc les plans sont sécants.

2. Déterminer l'intersection de ces deux plans.

L'intersection des deux plans est une droite dont les coordonnées des points vérifient le système $\begin{cases} -x+6y+z-1 &= 0 \\ 2x-5y+3z-2 &= 0 \end{cases}$

- Ce système a deux équations et trois inconnues.

On se ramène à un système 2×2 en considérant comme inconnues principales x et y et : $\begin{cases} -x+6y &= 1-z \\ 2x-5y &= 2-3z \end{cases}$

L'objectif est d'exprimer x et y en fonction de z.

- On multiplie la première équation par 2, le système devient $\begin{cases} -2x+12y &= 2-2z \\ 2x-5y &= 2-3z \end{cases}$

Par addition des deux lignes on obtient $7y = 4-5z$ et donc $\boxed{y = \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}z}$

Par substitution de y par $y = \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}z$ dans la première équation $-x+6y = 1-z$

on a $-x + 6\left(\dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}z\right) = 1-z$

donc $-x + \dfrac{24}{7} - \dfrac{30}{7}z = 1-z$

donc $-x = 1 - \dfrac{24}{7} - z + \dfrac{30}{7}z$

soit $-x = \dfrac{-17}{7}z + \dfrac{23}{7}$ et donc $\boxed{x = \dfrac{-23}{7} + \dfrac{17}{7}z}$

- On pose alors $\boxed{z = k}$ (k réel) et le système initial a donc pour solution : $\begin{cases} x &= \dfrac{-23}{7} + \dfrac{17}{7}k \\ y &= \dfrac{4}{7} - \dfrac{5}{7}k \\ z &= k \end{cases}$, $k \in \mathbb{R}$

- On reconnait la représentation paramétrique d'une droite.

La droite d'intersection des deux plans est donc la droite passant par le point $M\left(\dfrac{-23}{7} ; \dfrac{4}{7} ; 0\right)$ et de vecteur directeur $\overrightarrow{w}\left(\dfrac{17}{7} ; \dfrac{-5}{7} ; 1\right)$

- Vérification : pour $k = 1$, on a le point $A\left(\dfrac{-6}{7}; \dfrac{-1}{7}; 1\right)$

Ce point appartient à $\mathcal{P}_1$ car $-x+6y+z-1 = \dfrac{6}{7} - \dfrac{6}{7} + 1 - 1 = 0$

Ce point appartient à $\mathcal{P}_2$ car $2x-5y+3z-2 = \dfrac{-12}{7} + \dfrac{5}{7} + 3 - 2 = -1 + 3 - 2 = 0$