Raisonnement par récurrence
Montrer une inégalité

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geqslant n$.

.... **Utiliser les variations d'une fonction**................................ .

Exercice 2

On considère la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \dfrac{2}{3}$ et pour tout entier n $U_{n+1} = U_n\,(2 - U_n)$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto x(2-x)$.

On admet que cette fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$.

Montrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < U_n < 1$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_0 = 2$ et $V_{n+1} = f(V_n)$ pour tout entier naturel n

On admet les propriétés suivantes :
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$
- Si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$.

Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que :

1. Pour tout entier naturel n, $1 \leqslant V_n \leqslant 2$.

2. Pour tout entier naturel n, $V_{n+1} \leqslant V_n$.