Raisonnement par récurrence

Montrer une égalité

Correction

Exercice 1

Soit (U_n) la suite définie par : $U_2 = 3$ et $U_{n+1} = \dfrac{3\,U_n + 1}{U_n + 3}$ pour tout $n \geqslant 2$

Démontrer par récurrence que pour tout entier $n \geqslant 2$ on a $U_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$

• **Inititialisation** (pour $n = 2$)

D'une part on a : $U_2 = 3$,

d'autre part, pour $n = 2$, on a : $\dfrac{2^n + 2}{2^n - 2} = \dfrac{2^2 + 2}{2^2 - 2} = \dfrac{6}{2} = 3$ donc l'égalité est vraie pour $n = 2$

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 2$, tel que $U_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$. On va démontrer que $U_{n+1} = \dfrac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2}$

On a :

$$U_{n+1} = \frac{3\,U_n + 1}{U_n + 3} = \frac{3\left(\dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}\right) + 1}{\dfrac{2^n + 2}{2^n - 2} + 3}$$

$$= \frac{\dfrac{3(2^n + 2) + 2^n - 2}{2^n - 2}}{\dfrac{2^n + 2 + 3(2^n - 2)}{2^n - 2}} = \frac{3(2^n + 2) + 2^n - 2}{2^n + 2 + 3(2^n - 2)}$$

$$= \frac{3 \times 2^n + 6 + 2^n - 2}{2^n + 2 + 3 \times 2^n - 6} = \frac{2^n(3 + 1) + 4}{2^n(1 + 3) - 4} = \frac{2^n \times 4 + 4}{2^n \times 4 - 4}$$

$$= \frac{\cancel{2}(2^n \times 2 + 2)}{\cancel{2}(2^n \times 2 - 2)} = \frac{2^{n+1} + 2}{2^{n+1} - 2}$$

CQFD

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \geqslant 2$, on a $U_n = \dfrac{2^n + 2}{2^n - 2}$.

Exercice 2

On considère la suite numérique (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $V_0 = \dfrac{7}{8}$ et pour tout $n \geqslant 0$ $V_{n+1} = V_n^2$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$ $V_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

• **Inititialisation** (pour $n = 0$)

D'une part on a : $V_0 = \dfrac{7}{8}$,

d'autre part, pour $n = 0$, on a : $\left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^0} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{1} = \dfrac{7}{8}$ donc l'égalité est vraie pour $n = 0$

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$, tel que $V_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$. On va démontrer que $V_{n+1} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$

On a : $V_{n+1} = V_n^2 = \left[\left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}\right]^2 = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n \times 2} = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^{n+1}}$ CQFD

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$, on a $V_n = \left(\dfrac{7}{8}\right)^{2^n}$.

Exercice 3

Pour tout $n \geqslant 1$, soit $S_n = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2$

Démontrer que pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_n = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$

• **Inititialisation** (pour $n = 1$)

D'une part $S_1 = 1^2 = 1$,

d'autre part $\dfrac{1(2\times 1-1)(2\times 1+1)}{3} = \dfrac{1\times 3}{3} = 1$

donc l'égalité est vraie pour $n = 1$

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 1$, tel que $S_n = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$. On va démontrer que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)\Big[2(n+1)-1\Big]\Big[2(n+1)+1\Big]}{3}$

c'est-à-dire que $S_{n+1} = \dfrac{(n+1)(2n+1)(2n+3)}{3}$

Méthode :

Pour pouvoir utiliser l'égalité supposée vraie pour S_n, il faut trouver une relation entre S_{n+1} et S_n.

La relation est : $S_{n+1} = S_n + (2n+1)^2$.

En effet : $S_{n+1} = \sum_{k=1}^{n+1} (2k-1)^2 = \sum_{k=1}^{n} (2k-1)^2 + (2(n+1)-1)^2 = S_n + (2n+1)^2$

$$\begin{aligned}
\text{On a : } S_{n+1} &= S_n + (2n+1)^2 \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1)}{3} + \frac{3(2n+1)^2}{3} \\
&= \frac{n(2n-1)(2n+1) + 3(2n+1)(2n+1)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)\Big[n(2n-1) + 3(2n+1)\Big]}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n^2 - n + 6n + 3)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n^2 + 5n + 3)}{3} \\
&= \frac{(2n+1)(2n+3)(n+1)}{3}
\end{aligned}$$

Remarque : un calcul rapide permet de vérifier que l'on a bien : $2n^2 + 5n + 3 = (2n+3)(n+1)$

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \geqslant 1$, on a $S_n = \dfrac{n(2n-1)(2n+1)}{3}$