Raisonnement par récurrence

Montrer une inégalité

Correction

Exercice 1

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 0$ et pour tout $n \geqslant 0$, $U_{n+1} = 3U_n - 2n + 3$

Démontrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $U_n \geqslant n$.

• **Inititialisation** (pour $n = 0$)

On a : $U_0 = 0$ donc $U_0 \geqslant 0$.

et donc $U_n \geqslant n$ est vrai pour $n = 0$.

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$, tel que $U_n \geqslant n$. On va démontrer que $U_{n+1} \geqslant n + 1$

On a :

$U_n \geqslant n$

$3U_n \geqslant 3n$ Multiplication par un nombre positif, le sens de l'inégalité ne change pas

$3U_n - 2n \geqslant n$

$3U_n - 2n + 3 \geqslant n + 3$

or $n + 3 \geqslant n + 1$

donc $3U_n - 2n + 3 \geqslant n + 1$

CQFD

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout $n \geqslant 0$ on a : $U_n \geqslant n$.

Exercice 2

On considère la suite numérique (U_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $U_0 = \dfrac{2}{3}$ et pour tout entier n, $U_{n+1} = U_n\,(2 - U_n)$.

On considère la fonction $f : x \longmapsto x(2 - x)$.

On admet que cette fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$.

Démontrer par récurrence que, pour tout entier n, $0 < U_n < 1$.

• **Inititialisation** (pour $n = 0$)

On a $U_0 = \dfrac{2}{3}$ donc $0 < U_0 < 1$ et donc $0 < U_n < 1$ est vrai pour $n = 0$.

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$, tel que $0 < U_n < 1$. On va démontrer que $0 < U_{n+1} < 1$.

On a : $0 < U_n < 1$

La fonction f est croissante sur $[0\,;\,1]$, donc : $f(0) < f\,(U_n) < f(1)$

soit $0 < U_{n+1} < 1$.

CQFD

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout entier n, $0 < U_n < 1$.

Exercice 3

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[0\,;\,2]$ par : $\quad f(x) = \dfrac{2x+1}{x+1}$

Soit la suite (V_n) définie sur $\mathbb{N}$ par : $\quad V_0 = 2 \quad$ et $\quad V_{n+1} = f(V_n) \quad$ pour tout entier naturel n.

On admet les propriétés suivantes :
- f est croissante sur l'intervalle $[0\,;\,2]$
- Si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$.

1. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant V_n \leqslant 2$.

2. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} \leqslant V_n$.

1. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $1 \leqslant V_n \leqslant 2$.

• **Inititialisation** $\quad$ (pour $n = 0$)

On a : $V_0 = 2$ donc $1 \leqslant V_0 \leqslant 2 \quad$ et donc $1 \leqslant V_n \leqslant 2$ est vraie pour $n = 0$

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$, tel que $1 \leqslant V_n \leqslant 2$. On va démontrer que $1 \leqslant V_{n+1} \leqslant 2$.

On a : $1 \leqslant V_n \leqslant 2$

La fonction f est croissante sur $[0\,;\,2]$, donc : $\quad f(1) \leqslant f(V_n) \leqslant f(2)$

soit $\dfrac{3}{2} \leqslant V_{n+1} \leqslant \dfrac{5}{3}$. $\qquad$ or $\quad 1 \leqslant \dfrac{3}{2} \quad$ et $\quad \dfrac{5}{3} \leqslant 2 \quad \left(\text{Remarque : } 2 = \dfrac{6}{3}\right)$

donc $1 \leqslant V_{n+1} \leqslant 2$

CQFD

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n, $1 \leqslant V_n \leqslant 2$.

2. Montrer à l'aide d'un raisonnement par récurrence que pour tout entier naturel n, $V_{n+1} \leqslant V_n$.

• **Inititialisation** $\quad$ (pour $n = 0$)

On a : $V_1 = f(V_0) = f(2) = \dfrac{5}{3} \quad$ et $V_0 = 2 \quad$ donc $V_1 \leqslant V_0 \quad$ et donc $V_{n+1} \leqslant V_n$ est vraie pour $n = 0$

• **Hérédité**

Soit un entier $n \geqslant 0$, tel que $V_{n+1} \leqslant V_n$. On va démontrer que $V_{n+2} \leqslant V_{n+1}$.

On a : $V_{n+1} \leqslant V_n \quad$ avec V_n et V_{n+1} dans $[1\,;\,2]$.

En effet :

- d'après la question 1, on a $1 \leqslant V_n \leqslant 2$
- De plus si $x \in [1\ ;\ 2]$ alors $f(x) \in [1\ ;\ 2]$ alors sachant que $V_{n+1} = f(V_n)$, on a donc $V_{n+1} \in [1\,;\,2]$.

f est croissante sur $[0\,;\,2]$, donc à partir de $V_{n+1} \leqslant V_n$, on a donc : $f(V_{n+1}) \leqslant f(V_n)$

soit $V_{n+2} \leqslant V_{n+1}$

CQFD

• **Conclusion**

D'après le principe de raisonnement par récurrence, pour tout entier naturel n, $V_{n+1} \leqslant V_n$.