Ex 1

Partie 1

1) Sur $]-\infty,-1]$ $f'(x) \geq 0$ donc f croissante

Sur $[-1,+\infty[$ $f'(x) \leq 0$ donc f décroissante

2) Sur $]-\infty;0]$ f' est décroissante donc f concave

Sur $[0,+\infty[$ f' est croissante donc f convexe

Partie 2

$f(x) = (x+2)e^{-x}$

1a) $f'(x) = 1 \times e^{-x} + (x+2)e^{-x} \times (-1)$

$= e^{-x}(1-(x+2))$

$= e^{-x}(1-x-2)$

$\boxed{f'(x) = (-x-1)e^{-x}}$

b)

x	$-\infty$		1		$+\infty$
$-x-1$		$+$	0	$-$	
e^{-x}		$+$		$+$	
$f'(x)$		$+$	0	$-$	
$f(x)$		$\nearrow$	$3/e$	$\searrow$	

$f(1) = 3e^{-1} = \frac{3}{e}$

2) $f''(x) = -1\, e^{-x} + (-x-1) \times e^{-x} \times (-1)$

$= e^{-x}(-1-(-x-1))$

$= e^{-x}(-1+x+1)$

$= e^{-x}(x)$

$\boxed{f''(x) = x e^{-x}}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

Sur $[0,+\infty[$ $f''(x) \geq 0$ donc f convexe

Sur $]-\infty,0]$ $f''(x) \leq 0$ donc f concave

$f''(0) = 0$

f'' s'annule en 0 en changeant de signe donc

0 est un point d'inflexion

Ex 2 $T_0 = -19$ $\forall n \geq 0$ $T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$

1) $T_{n+1} = -0{,}06\, T_n + 1{,}5 + T_n$

$\boxed{T_{n+1} = 0{,}94\, T_n + 1{,}5}$

2) Démontrer que pour tout $n \geq 0$ $T_n \leq 25$

① $T_0 = -19$ donc $T_0 \leq 25$

donc vrai pour $n=0$

② Soit $n \geq 0$ tel que $T_n \leq 25$

On va démontrer que $T_{n+1} \leq 25$

On a $T_n \leq 25$

$0{,}94\, T_n \leq 1$

$0{,}94\, T_n + 1{,}5 \leq 23{,}5$

$T_{n+1} \leq 23{,}5$ or $23{,}5 \leq 25$.

et donc $T_{n+1} \leq 25$

③ Conclusion $\forall n \geq 0$ $T_n \leq 25$

Oui ce résultat était prévisible car la température extérieure est de 25°C donc les gâteaux auront une température au plus égale à 25°C

3) $T_{n+1} - T_n = -0{,}06(T_n - 25)$

or $\forall n \in \mathbb{N}$ $T_n \leq 25$ donc $T_n - 25 \leq 0$

donc $T_{n+1} - T_n \geq 0$ $\forall n \in \mathbb{N}$

La suite (T_n) est donc croissante.

4) (T_n) est croissante et majorée (par 25) donc elle converge

5) $\forall n \in \mathbb{N}$ $U_n = T_n - 25$

a) $U_{n+1} = T_{n+1} - 25 = 0{,}94T_n + 1{,}5 - 25$

$= 0{,}94T_n - 23{,}5$

$= 0{,}94\left(T_n - \frac{23{,}5}{0{,}94}\right)$

$= 0{,}94\,(T_n - 25)$

$\boxed{U_{n+1} = 0{,}94\, U_n}$

donc (U_n) est géométrique de raison 0,94 et de premier terme $U_0 = T_0 - 25 = -44$

b) $\forall n \in \mathbb{N}$ $\quad U_n = U_0 \times q^n$

$U_n = -44 \times 0{,}94^n$

et $T_n = U_n + 25 = -44 \times 0{,}94^n + 25$

c) $\lim\limits_{n \to +\infty} 0{,}94^n = 0$ $\quad$ car $-1 < 0{,}94 < 1$

donc $\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = -44 \times 0 + 25 = 25$

$\boxed{\lim\limits_{n \to +\infty} T_n = 25}$ La température des gâteaux augmente et tend vers la température ambiante.

6) $\frac{1}{2} h = 30$ min.

On cherche donc $\boxed{T_{30} \simeq 18}$

donc environ 18°C

7) les gateaux seront à une température de 10°C entre 17 et 18 min

car $T_{17} \simeq 9{,}65$

$T_{18} \simeq 10{,}6$