Calculatrice interdite **Durée 1h20**

Exercice 1 — 3 points

1. Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 1$ et $g(x) = 1 - x$.

Déterminer $f \circ g(x)$ et $g \circ f(x)$.

2. Soit la fonction h définie pour $x \neq 0$ par $h(x) = \dfrac{3}{x^2} - 2$ et la fonction w définie pour $x \neq 0$ par $w(x) = \dfrac{1}{x}$.

Déterminer la fonction u telle que h soit la composée des fonctions u et w.

Exercice 2 — 5 points

Calculer la dérivée des fonctions suivantes :

$$f(x) = \frac{\mathrm{e}^{x^2}}{x} \qquad g(x) = \sqrt{\frac{1}{x} + 2} \qquad h(x) = 3x\,(-x+1)^4 \qquad p(x) = \frac{7}{\mathrm{e}^x + x}$$

Exercice 3 — 2 points

Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{x^2 - 1}{3}$.

On note $\mathscr{C}_f$ la représentation graphique de f dans un repère orthogonal du plan.

Déterminer une équation de la tangente à la courbe $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse -2.

Exercice 4 — 4 points

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $U_{n+1} = \dfrac{U_n}{1 + 2U_n}$.

1. Calculer U_1 et U_2.

2. On désigne par (V_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = \dfrac{1}{U_n}$.

a. Démontrer que la suite (V_n) est arithmétique et préciser la raison et le premier terme.

b. En déduire l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n.

Exercice 5 — 3 points

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = 1$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $U_{n+1} = 2U_n - n + 3$.

Démontrer par récurrence que pour tout $n \geqslant 0$, $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$.

Exercice 6 — 3 points

Soit la suite (U_n) définie par $U_0 = \dfrac{1}{3}$ et pour tout $n \geqslant 0$ par $U_{n+1} = \dfrac{3}{2}U_n - 5$.

On désigne par (V_n) la suite définie, pour tout entier naturel n, par $V_n = U_n - 10$.

1. Démontrer que la suite (V_n) est une suite géométrique.

2. En déduire l'expression de V_n puis de U_n en fonction de n.