Calculatrice autorisée **Durée 1h10**

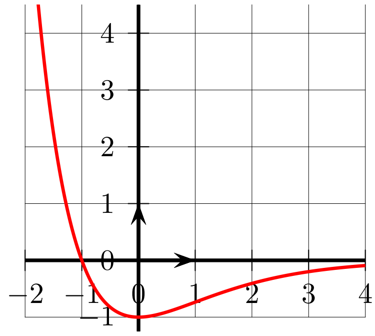
Exercice 1 — 8 points

Partie 1

On donne ci-contre, dans le plan rapporté à un repère orthonormé, la courbe représentant la fonction dérivée f' d'une fonction f dérivable sur $\mathbb{R}$.

À l'aide de cette courbe, conjecturer, en justifiant les réponses :

1. Le sens de variation de la fonction f sur $\mathbb{R}$.
2. La convexité de la fonction f sur $\mathbb{R}$.



Courbe représentant la **dérivée** f' de la fonction f.

Partie 2

On admet que la fonction f mentionnée dans la Partie 1 est définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = (x+2)\mathrm{e}^{-x}$

On note $\mathcal{C}$ la courbe représentative de f dans un repère orthonormé $(\mathrm{O}, \vec{\imath}, \vec{\jmath})$.

On admet que la fonction f est deux fois dérivable sur $\mathbb{R}$, et on note f' et f'' les fonctions dérivées première et seconde de f respectivement.

1. **a.** Montrer que, pour tout nombre réel x, $f'(x) = (-x-1)\mathrm{e}^{-x}$.
   b. Étudier les variations sur $\mathbb{R}$ de la fonction f et dresser son tableau de variations.
2. Déterminer, pour tout nombre réel x, l'expression de $f''(x)$ et étudier la convexité de la fonction f.
   Préciser les points d'inflexion de la courbe $\mathcal{C}$. Justifier votre réponse.

Exercice 2 — 12 points

Cécile a invité des amis à déjeuner sur sa terrasse. Elle a prévu en dessert un assortiment de gâteaux individuels qu'elle a achetés surgelés. Elle sort les gâteaux du congélateur à -19 °C et les apporte sur la terrasse où la température est de 25 °C.

On note T_n la température des gâteaux en degré Celsius, au bout de n minutes après leur sortie du congélateur ; ainsi $T_0 = -19$.

On admet que pour modéliser l'évolution de la température, on doit avoir la relation suivante :

Pour tout entier naturel n, $\quad T_{n+1} - T_n = -0{,}06 \times (T_n - 25)$

1. Justifier que, pour tout entier n, on a $T_{n+1} = 0{,}94T_n + 1{,}5$
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, on a $T_n \leqslant 25$.
   En revenant à la situation étudiée, ce résultat était-il prévisible ?
3. Déterminer pour $n \in \mathbb{N}$, le signe de $T_{n+1} - T_n$. Que peut-on en déduire pour la suite (T_n) ?
4. Démontrer que la suite (T_n) est convergente.
5. On pose pour tout entier naturel n, $U_n = T_n - 25$.
   a. Montrer que la suite (U_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme U_0.
   b. En déduire que pour tout entier naturel n, $T_n = -44 \times 0{,}94^n + 25$.
   c. En déduire la limite de la suite (T_n). Interpréter ce résultat dans le contexte de la situation étudiée.
6. Le fabricant conseille de consommer les gâteaux au bout d'une demi-heure à température ambiante après leur sortie du congélateur. Quelle est alors la température atteinte par les gâteaux ? On donnera une valeur arrondie à l'entier le plus proche.
7. Cécile est une habituée de ces gâteaux, qu'elle aime déguster lorsqu'ils sont encore frais, à la température de 10 °C. Donner un encadrement entre deux entiers consécutifs du temps en minutes après lequel Cécile doit déguster son gâteau.