28/09/21 DS 1

Ex 1 $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = -x^2+1$ $g(x) = 1-x$

1) $f\circ g(x) = f(g(x)) = f(1-x) = \boxed{-(1-x)^2+1}$

$g\circ f(x) = g(f(x)) = g(-x^2+1) = 1-(-x^2+1)$

$= \boxed{x^2}$

2) $\forall x \neq 0$ $h(x) = \frac{3}{x^2} - 2$

$w(x) = \frac{1}{x}$

$x \xmapsto{w} \frac{1}{x} \xmapsto{u} \frac{3}{x^2} - 2 = 3\times\left(\frac{1}{x}\right)^2 - 2$

donc $h(x) = u\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\boxed{u(x) = 3x^2 - 2}$

$\boxed{h(x) = u\circ w(x)}$

Ex 2

① $f(x) = \frac{e^{x^2}}{x}$ $\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v - uv'}{v^2}$

$(e^u)' = e^u \times u'$

$f'(x) = \frac{e^{x^2}\times 2x\times x - e^{x^2}\times 1}{x^2} = \boxed{\frac{e^{x^2}(2x^2-1)}{x}}$

② $g(x) = \sqrt{\frac{1}{x}+2}$ $(\sqrt{u})' = \frac{u'}{2\sqrt{u}}$

$g'(x) = \frac{-\frac{1}{x^2}}{2\sqrt{\frac{1}{x}+2}} = \boxed{\frac{-1}{2x^2\sqrt{\frac{1}{x}+2}}}$

③ $h(x) = 3x(-x+1)^4$ $(uv)' = u'v+uv'$

$(u^4)' = 4u^3\times u'$

$h'(x) = 3(-x+1)^4 + 3x\times 4(-x+1)^3\times(-1)$

$h'(x) = 3(-x+1)^3\left[(-x+1) - 4x\right] = \boxed{3(-x+1)^3(-5x+1)}$

④ $p(x) = \frac{7}{e^x+x} = 7\times\frac{1}{e^x+x}$

$p'(x) = 7\times\frac{-(e^x+1)}{(e^x+x)^2} = \boxed{\frac{-7(e^x+1)}{(e^x+x)^2}}$

Ex 3 $\forall x \in \mathbb{R}$ $f(x) = \frac{x^2-1}{3} = \frac{1}{3}\times(x^2-1)$

Equation de la tangente à $\mathcal{C}_f$ au point d'abscisse -2

$y = f'(-2)(x+2) + f(-2)$

$f(-2) = \frac{3}{3} = \boxed{1}$

$f'(x) = \frac{1}{3}\times 2x = \boxed{\frac{2x}{3}}$

$f'(-2) = -\frac{4}{3}$

$y = -\frac{4}{3}(x+2)+1$

$y = -\frac{4}{3}x - \frac{8}{3} + 1$

$\boxed{y = -\frac{4}{3}x - \frac{5}{3}}$

Ex 4 $U_0 = 1$ $\forall n \geqslant 0$ $U_{n+1} = \frac{U_n}{1+2U_n}$

1) $U_1 = \frac{U_0}{1+2U_0} = \boxed{\frac{1}{3}}$

$U_2 = \frac{U_1}{1+2U_1} = \frac{\frac{1}{3}}{1+\frac{2}{3}} = \frac{\frac{1}{3}}{\frac{5}{3}} = \frac{1}{3}\times\frac{3}{5} = \boxed{\frac{1}{5}}$

2) $\forall n \geqslant 0$ $V_n = \frac{1}{U_n}$

a) $V_{n+1} - V_n = \frac{1}{U_{n+1}} - \frac{1}{U_n} = \frac{1+2U_n}{U_n} - \frac{1}{U_n} = \frac{2U_n}{U_n} = 2$

Donc $\forall n \geqslant 0$ $\boxed{V_{n+1} = V_n + 2}$

et donc (V_n) est arithmétique de raison 2 de premier terme $V_0 = \frac{1}{U_0} = 1$

b) $\forall n \geqslant 0$ $V_n = V_0 + nr$

$\boxed{V_n = 1+2n}$

et $\forall n \geqslant 0$ $U_n = \frac{1}{V_n} = \frac{1}{1+2n}$

$\boxed{U_n = \frac{1}{1+2n}}$

$\boxed{\text{Ex 5}}$ $U_0 = 1$ $\forall n \geq 0$ $U_{n+1} = 2U_n - n + 3$

Démontrer par récurrence que :

$\forall n \geq 0$ $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$

① Initialisation :

Pour $n = 0$ $U_0 = 1$

$3 \times 2^n + n - 2 = 3 \times 1 - 2 = 1$

donc vrai pour $n = 0$

② Hérédité :

Soit $n \geq 0$ tel que $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$

Démontrer que $U_{n+1} = 3 \times 2^{n+1} + n - 1$

On a : $U_{n+1} = 2U_n - n + 3$

$= 2(3 \times 2^n + n - 2) - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + 2n - 4 - n + 3$

$= 3 \times 2^{n+1} + n - 1$ CQFD.

③ Conclusion :

D'après le principe de raisonnement par récurrence

$\forall n \geq 0$ $U_n = 3 \times 2^n + n - 2$

$\boxed{\text{Ex 6}}$ $U_0 = \frac{1}{3}$ $\forall n \geq 0$ $U_{n+1} = \frac{3}{2} U_n - 5$ $V_n = U_n - 10$.

1) $V_{n+1} = U_{n+1} - 10 = \frac{3}{2} U_n - 15 = \frac{3}{2}\left(U_n - \frac{15}{\frac{3}{2}}\right) = \frac{3}{2}(U_n - 10) = \frac{3}{2} V_n$

$\boxed{V_{n+1} = \frac{3}{2} V_n}$ donc (V_n) est géométrique de raison $\frac{3}{2}$

de premier terme $V_0 = U_0 - 10 = \frac{1}{3} - 10$

$= -\frac{29}{3}$

2) $\forall n \geq 0$ $V_n = V_0 \times q^n$

$\boxed{V_n = -\frac{29}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n}$

$\forall n \geq 0$ $V_n = U_n - 10$ donc $U_n = V_n + 10$

$\boxed{U_n = -\frac{29}{3} \times \left(\frac{3}{2}\right)^n + 10}$