1. L'effectif de cétacés au 31 octobre 2017 est de $3000 + 80$, c'est-à-dire 3080.

Entre le 1er novembre et le 31 mai, une baisse de 5 % a lieu, l'effectif au 1er juin 2018 est donc : $U_1 = 3\ 080 \times 0{,}95 = \boxed{2\ 926}$.

2. En généralisant, on a, pour tout entier naturel n : $U_{n+1} = (U_n + 80) \times 0{,}95 = 0{,}95U_n + 80 \times 0{,}95 = \boxed{0{,}95U_n + 76}$

3. Formule à entrer dans la cellule C2 : $\boxed{\text{= 0.95*B2 + 76}}$ ou $\boxed{\text{= C2 + 80*0,85}}$

4. **a.** Démontrons par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n \geqslant 1\ 520$.

— **Initialisation**. On a $U_0 = 3\ 000 \geqslant 1\ 520$, la propriété est donc vraie pour $n = 0$.

— **Hérédité.** Soit $n \in \mathbb{N}$ tel que $U_n \geqslant 1\ 520$. On va démontrer que $U_{n+1} \geqslant 1\ 520$.

Par hypothèse de récurrence, $U_n \geqslant 1\ 520$,

donc $0{,}95U_n \geqslant 0{,}95 \times 1\ 520$

puis : $0{,}95U_n + 76 \geqslant 0{,}95 \times 1\ 520 + 76$

c'est-à-dire $U_{n+1} \geqslant 1520$ La propriété est donc héréditaire.

— **Conclusion.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$: $U_n \geqslant 1\ 520$.

b. Soit $n \in \mathbb{N}$, alors : $U_{n+1} - U_n = 0{,}95U_n + 76 - U_n = -0{,}05U_n + 76$

D'après la question précédente, $U_n \geqslant 1\ 520$,

donc $-0{,}05U_n \leqslant -0{,}05 \times 1\ 520$,

c'est-à-dire $-0{,}05U_n \leqslant -76$, donc $-0{,}05U_n + 76 \leqslant 0$,

c'est-à-dire $U_{n+1} - U_n \leqslant 0$, ce qui prouve que la suite (U_n) est décroissante.

c. La suite (U_n) est décroissante et minorée (par 1 520), elle est donc convergente.

5. **a.** Soit $n \in \mathbb{N}$, alors :

Méthode 1 :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 1\ 520 \\ &= 0{,}95U_n + 76 - 1\ 520 \\ &= 0{,}95U_n - 1\ 444 \\ &= 0{,}95\left(U_n - \frac{1\ 444}{0{,}95}\right) \\ &= 0{,}95\,(U_n - 1\ 520) \\ &= \boxed{0{,}95V_n}. \end{aligned}$$

Méthode 2 :

$$\begin{aligned} V_{n+1} &= U_{n+1} - 1\ 520 \\ &= 0{,}95U_n + 76 - 1\ 520 \\ &= 0{,}95U_n - 1\ 444 \\ &= 0{,}95\,(V_n + 1520) - 1\ 444 \\ &= 0{,}95V_n + 1\ 444 - 1\ 444 \\ &= \boxed{0{,}95V_n}. \end{aligned}$$

La suite (V_n) est donc géométrique de raison $0{,}95$ et de premier terme $V_0 = U_0 - 1\ 520 = \boxed{1\ 480}$.

b. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $V_n = V_0 \times q^n$, soit $V_n = 1\ 480 \times 0{,}95^n$.

D'après $V_n = U_n - 1\ 520$, on en déduit que $U_n = V_n + 1\ 520$, et donc $\boxed{U_n = 1\ 480 \times 0{,}95^n + 1\ 520.}$

c. $-1 < 0{,}95 < 1$, donc $\lim\limits_{n\to+\infty} 0{,}95^n = 0$, on en déduit donc que $\boxed{\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = 1\ 520}$.

6. Algorithme complété :

```
n ← 0
u ← 3 000
Tant que u ⩾ 2 000 :
    n ← n + 1
    u ← 0,95 ∗ u + 76
Fin de Tant que
```

7. La limite de la suite (U_n) est 1 520 qui est inférieur à 2000, donc la réserve fermera un jour.

A l'aide de la calculatrice, on trouve que la réserve fermera la 22e année soit en 2039.

(en utilisant : $U_n = 1\ 480 \times 0{,}95^n + 1\ 520$)