

Le directeur d'une réserve marine a recensé 3 000 cétacés dans cette réserve au 1<sup>er</sup> juin 2017. Il est inquiet car il sait que le classement de la zone en « réserve marine » ne sera pas reconduit si le nombre de cétacés de cette réserve devient inférieur à 2 000. Une étude lui permet d'élaborer un modèle selon lequel, chaque année :

- entre le 1<sup>er</sup> juin et le 31 octobre, 80 cétacés arrivent dans la réserve marine ;
- entre le 1<sup>er</sup> novembre et le 31 mai, la réserve subit une baisse de 5 % de son effectif par rapport à celui du 31 octobre qui précède.

On modélise l'évolution du nombre de cétacés par une suite  $(U_n)$ . Selon ce modèle, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n$  désigne le nombre de cétacés au 1<sup>er</sup> juin de l'année 2017 +  $n$ . On a donc  $U_0 = 3\,000$ .

1. Justifier que  $U_1 = 2\,926$ .
2. Justifier que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_{n+1} = 0,95U_n + 76$ .
3. À l'aide d'un tableur, on a calculé les 8 premiers termes de la suite  $(U_n)$ . Le directeur a configuré le format des cellules pour que ne soient affichés que des nombres arrondis à l'unité.

	A	B	C	D	E	F	G	H	I
1	$n$	0	1	2	3	4	5	6	7
2	$U_n$	3 000	2 926	2 856	2 789	2 725	2 665	2 608	2 553

Quelle formule peut-on entrer dans la cellule C2 afin d'obtenir, par recopie vers la droite, les termes de la suite  $(U_n)$  ?

4.
  - a. Démontrer que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n \geq 1\,520$ .
  - b. Démontrer que la suite  $(U_n)$  est décroissante.
  - c. Justifier que la suite  $(U_n)$  est convergente. On ne cherchera pas ici la valeur de la limite.
5. On désigne par  $(V_n)$  la suite définie par, pour tout entier naturel  $n$ ,  $V_n = U_n - 1\,520$ .
  - a. Démontrer que la suite  $(V_n)$  est une suite géométrique de raison 0,95 dont on précisera le premier terme.
  - b. En déduire que, pour tout entier naturel  $n$ ,  $U_n = 1\,480 \times 0,95^n + 1\,520$ .
  - c. Déterminer la limite de la suite  $(U_n)$ .
6. Recopier et compléter l'algorithme suivant pour déterminer l'année à partir de laquelle le nombre de cétacés présents dans la réserve marine sera inférieur à 2 000.

La notation «  $\leftarrow$  » correspond à une affectation de valeur, ainsi «  $n \leftarrow 0$  » signifie « Affecter à  $n$  la valeur 0 ».

$n \leftarrow 0$
$U \leftarrow 3\,000$
Tant que ...
$n \leftarrow \dots$
$U \leftarrow \dots$
Fin de Tant que

7. La réserve marine fermera-t-elle un jour ? Si oui, déterminer l'année de la fermeture.