Ex 1 $U_0 = 1$ $\forall n \geq 0$ $U_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1$

A 1) Démontrer que pour tout $n \geq 0$ $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

- Pour $n = 0$ $U_0 = 1$

$0 < U_0 < \frac{4}{3}$ donc vrai pour $n = 0$

- Soit $n \geq 0$ fixé quelconque tel que $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

On va démontrer que $n+1 < U_{n+1} < n + 1 + \frac{4}{3}$

On a $n < U_n < n + \frac{4}{3}$

$$\frac{1}{4}n < \frac{1}{4}U_n < \frac{1}{4}n + \frac{1}{3}$$

$$\frac{1}{4}n + \frac{3}{4}n + 1 < \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 < \frac{1}{4}n + \frac{1}{3} + \frac{3}{4}n + 1$$

$$n + 1 < U_{n+1} < n + \frac{4}{3} < n + \frac{4}{3} + 1$$

- Conclusion : $\forall n \geq 0$ $\boxed{n < U_n < n + \frac{4}{3}}$ CQFD

2) On a : $\forall n \geq 0$ $n < U_n$

avec $\lim_{n \to +\infty} n = +\infty$ donc d'après le théorème de comparaison $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

3) $U_{n+1} - U_n = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 - U_n$

$$= -\frac{3}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 = \frac{3}{4}\left(-U_n + n + \frac{4}{3}\right)$$

4) D'après 1) $U_n < n + \frac{4}{3}$

donc $n + \frac{4}{3} - U_n > 0$.

donc $U_{n+1} - U_n > 0$

et donc (U_n) est croissante

4) La suite (U_n) est croissante. Si elle était majorée, elle serait convergente.

Or $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ donc (U_n) n'est pas majorée

Méthode 2 $\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty$ donc (U_n) n'est pas majorée.

B $V_n = U_n - n$ $\forall n \geq 0$

1) $V_{n+1} = U_{n+1} - (n+1) = U_{n+1} - n - 1$

$$V_{n+1} = \frac{1}{4}U_n + \frac{3}{4}n + 1 - n - 1 = \frac{1}{4}U_n - \frac{1}{4}n$$

$$= \frac{1}{4}(U_n - n)$$

$$\boxed{V_{n+1} = \frac{1}{4}V_n}$$

(V_n) est donc géométrique de raison $\frac{1}{4}$, de premier terme $V_0 = U_0 - 0 = 1$

2) $U_n = V_n + n$ avec $V_n = V_0 \times q^n$

$$V_n = 1 \times \left(\frac{1}{4}\right)^n = \left(\frac{1}{4}\right)^n$$

donc $\boxed{U_n = \left(\frac{1}{4}\right)^n + n}$

$\lim_{n \to +\infty} \left(\frac{1}{4}\right)^n = 0$ car $0 < \frac{1}{4} < 1$

donc $\boxed{\lim_{n \to +\infty} U_n = +\infty}$

181220