

Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x}$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x}$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x}$

4. Soit $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax$

5. Soit $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ax$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}}$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x e^{5x}$

Correction page suivante

Correction

1. $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x} = \frac{+\infty}{+\infty} = F.I.$

On a : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x-1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x}$

On sait que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} = 0$

On a donc : $\lim_{x \rightarrow +\infty} (x-1)e^{-x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x}{e^x} - \frac{1}{e^x} = 0 - \frac{1}{+\infty} = 0$

2. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x} = +\infty \times 0 = F.I.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)^2$

On sait que $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0}$

donc $\lim_{x \rightarrow -\infty} x^2 e^{2x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} (xe^x)^2 = \lim_{X \rightarrow 0} X^2 = 0$

3. $\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{e^x} = -\infty + \frac{1}{0^+} = -\infty + \infty = F.I.$ 0^+ car $e^x > 0$ pour tout réel x .

$\lim_{x \rightarrow -\infty} x + e^{-x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} x + \frac{1}{e^x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{xe^x + 1}{e^x} = \frac{0+1}{0^+} = +\infty$ car on sait que $\boxed{\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^x = 0}$

0+

4. Soit $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x - ax = 0 + \infty = +\infty$

5. Soit $a > 0$, $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ax$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ax = +\infty - \infty = F.I.$

On sait que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} e^x - ax = \lim_{x \rightarrow +\infty} x \left(\frac{e^x}{x} - a \right) = +\infty(+\infty - a) = +\infty$

6. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \frac{+\infty}{+\infty} = F.I.$

$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \frac{x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x}$

On sait que $\boxed{\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} = +\infty}$ donc $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{\sqrt{x}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{e^x}{x} \times \sqrt{x} = +\infty(+\infty) = +\infty$

7. $\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{5x} = -\infty \times 0 = F.I.$

$\lim_{x \rightarrow -\infty} xe^{5x} = \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{1}{5} \times 5xe^{5x} = \lim_{X \rightarrow -\infty} \frac{1}{5} \cdot X \cdot e^X = \frac{1}{5} \times 0 = 0$ car on sait que $\boxed{\lim_{X \rightarrow -\infty} X \cdot e^X = 0}$

(après avoir posé : $X = 5x$)