ÉPREUVE D’ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Janvier 2022

Sujet 1

Durée de l’épreuve : **4 heures**

L’usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.
L’usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l’appréciation de la copie. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Ce sujet est composé de 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 et comporte 5 exercices de 5 points chacun.

Exercice 1 **5 points**

On considère la suite (U_n) définie par $U_0 = 10\,000$ et pour tout entier naturel n :

$U_{n+1} = 0{,}95U_n + 200.$

1. Calculer U_1 et U_2.

2. a. Démontrer, à l'aide d'un raisonnement par récurrence, que pour tout entier naturel n :

$$U_n > 4\,000.$$

b. On admet que la suite (U_n) est décroissante. Justifier qu'elle converge.

3. Pour tout entier naturel n, on considère la suite (V_n) définie par : $V_n = U_n - 4\,000$.

a. Démontrer que la suite (V_n) est géométrique. Vous préciserez la raison et le premier terme.

b. En déduire que pour tout entier naturel n :

$$U_n = 4\,000 + 6\,000 \times 0{,}95^n .$$

c. Quelle est la limite de la suite (U_n) ? Justifier la réponse.

4. En 2020, une espèce animale comptait 10 000 individus. L'évolution observée les années précédentes conduit à estimer qu'à partir de l'année 2021, cette population baissera de 5 % chaque début d'année.
Pour ralentir cette baisse, il a été décidé de réintroduire 200 individus à la fin de chaque année, à partir de 2021.
Une responsable d'une association soutenant cette stratégie affirme que : « l'espèce ne devrait pas s'éteindre, mais malheureusement, nous n'empêcherons pas une disparition de plus de la moitié de la population ».
Que pensez-vous de cette affirmation ? Justifier la réponse

Exercice 2 **5 points**

Pour réaliser une loterie, un organisateur dispose d'une part d'un sac contenant exactement un jeton blanc et 9 jetons noirs indiscernables au toucher et d'autre part d'un dé cubique équilibré dont les faces sont numérotées de 1 à 6.
Il décide des règles suivantes pour le déroulement d'une partie.

Le joueur doit tirer un jeton puis jeter le dé :

- si le jeton est blanc, le joueur perd lorsque le jet du dé donne 6;
- si le jeton est noir, le joueur gagne lorsque le jet du dé donne 6.

À la fin de la partie, le jeton est remis dans le sac.

On note B l'événement « le jeton tiré est blanc » et G l'événement « le joueur gagne le jeu ».

La probabilité d'un événement E sera notée $p(E)$.

Partie A

1. Montrer que $p(G) = \frac{7}{30}$. On pourra s'aider d'un arbre pondéré.
2. Quelle est la probabilité que le joueur ait tiré le jeton blanc sachant qu'il a perdu ?
3. Un joueur fait quatre parties de façon indépendante.
   Calculer la probabilité qu'il en gagne exactement deux et en donner une valeur approchée à 10^{-3} près.
4. Quel nombre minimal de parties un joueur doit-il faire pour que la probabilité d'en gagner au moins une soit supérieure à 0,99 ?

Partie B

L'organisateur décide de faire de sa loterie un jeu d'argent :

- chaque joueur paie 1 € par partie ;
- si le joueur gagne la partie, il reçoit 5 € ;
- si le joueur perd la partie, il ne reçoit rien.

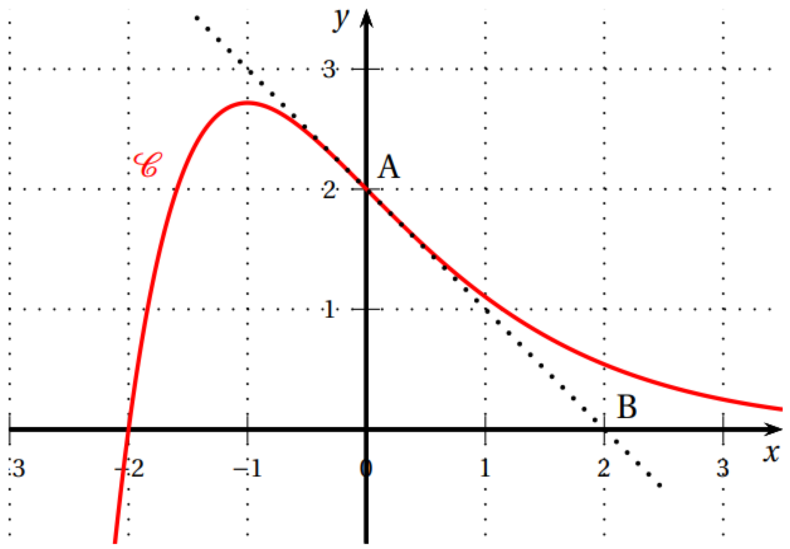
1. On note X la variable aléatoire égale au gain algébrique (positif ou négatif) du joueur à l'issue d'une partie.
   a. Donner la loi de probabilité de X et son espérance $E(X)$.
   b. On dit que le jeu est favorable à l'organisateur si $E(X) < 0$. Le jeu est-il favorable à l'organisateur ?

2. L'organisateur décide de modifier le nombre n de jetons noirs (n entier naturel non nul) tout en gardant un seul jeton blanc.
   Pour quelles valeurs de l'entier n le jeu est-il défavorable à l'organisateur ?

Exercice 3 **5 points**

On a représenté ci-dessous, dans un repère orthonormé, une portion de la courbe représentative $\mathscr{C}$ d'une fonction *f* définie et dérivable sur $\mathbb{R}$

On indique de plus que la droite (AB), avec A(0;2) et B(2;0), est tangente à la courbe $\mathscr{C}$ au point A.



1. Conjecturer la convexité de *f* sur $\mathbb{R}$ ainsi que les limites de *f* en $-\infty$ et $+\infty$.

2. On admet que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = \dfrac{ax+b}{e^x}$ et on note f' la fonction dérivée de *f*.

   a. Calculer $f'(x)$
   b. Donner par lecture graphique la valeur de $f(0)$ et celle de $f'(0)$.
   c. Déduire des questions précédentes les valeurs de *a* et *b*.

3. On admet que pour tout nombre réel *x*, $f(x) = \dfrac{x+2}{e^x}$ et $f'(x) = \dfrac{-x-1}{e^x}$.

   a. Etudier le sens de variation de *f* sur $\mathbb{R}$.
   b. Les conjectures émises à la question 1 concernant la convexité et les limites sont-elles vraies ? Justifier rigoureusement.

Exercice 4 **5 points**

Dix affirmations, réparties en trois groupes, sont proposées ci-dessous. Le candidat portera sur sa copie, en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin la mention VRAI ou FAUX. Chaque réponse convenable rapporte 0,5 point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. L'absence de réponse n'est pas pénalisée. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

Affirmation 1.a.	Pour tous réels a et b , $(e^a + e^{-a})^2 = e^{2a}+2+\frac{1}{e^{2a}}$.
Affirmation 1.b.	La droite d'équation y = x+1 est la tangente au point d'abscisse 0 à la courbe représentative de la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = e^{2x}$.
Affirmation 1.c.	Pour tout réel x, $\frac{e^x+3e^{2x}}{e^{2x}} = e^x + 3$.

Affirmation 2.a.	La courbe de la fonction f définie sur $]1;+\infty[$ par $f(x) = \frac{100x+1}{1-x}$ admet une asymptote horizontale.
Affirmation 2.b.	Si a est un réel positif et si f est la fonction définie sur $]2;+\infty[$ par $f(x) = \frac{ax+1}{4-2x}$ alors $\lim\limits_{x \to 2} f(x) = +\infty$.
Affirmation 2.c.	Si u et v sont les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ par $u(x) = x^2 - x$ et $v(x) = 2x+1$ alors, pour tout réel x, $u\circ v(x) = 4x^2 + 2x$.

Affirmation 3.a	Toute suite décroissante a pour limite $-\infty$.
Affirmation 3.b.	Si $\lim u_n = +\infty$ et si $\lim v_n = 0$ alors $\lim u_n \times v_n = 0$.
Affirmation 3.c.	La suite définie sur $\mathbb{N}$ par $u_n = 100\times(-1)^n + n$ n'a pas de limite.
Affirmation 3.d.	Si (u_n) est croissante et non majorée alors la suite $\left(\frac{1}{u_n}\right)$ converge.