Exercices Fonctions ln et exp.

Ex 1

1) $A = \ln(2^{-5}) + \ln 8 - \ln\left(\frac{e}{2}\right) + 3\ln(\sqrt{2})$

$= -5\ln 2 + \ln(2^3) - (\ln e - \ln 2) + 3 \times \frac{1}{2}\ln 2$

$= -5\ln 2 + 3\ln 2 - \ln e + \ln 2 + \frac{3}{2}\ln 2$

$= -\ln 2 - 1 + \frac{3}{2}\ln 2$

$\boxed{A = \frac{1}{2}\ln 2 - 1}$

2) $B = \ln\left(\frac{3}{4}\right) - \ln\left(\frac{3^7}{2e^4}\right)$

$B = \ln 3 - \ln 4 - \left(\ln(3^7) - \ln(2e^4)\right)$

$B = \ln 3 - \ln(2^2) - \left(7\ln 3 - (\ln 2 + \ln e^4)\right)$

$= \ln 3 - 2\ln 2 - 7\ln 3 + (\ln 2 + 4)$

$\boxed{B = -6\ln 3 - \ln 2 + 4}$

3) $C = \ln(\alpha e^3) - \ln\left(\frac{\sqrt{\alpha}}{e}\right)$

$= \ln(\alpha) + \ln(e^3) - (\ln(\sqrt{\alpha}) - \ln e)$

$= \ln\alpha + 3 - \left(\frac{1}{2}\ln\alpha - 1\right)$

$\boxed{C = \frac{1}{2}\ln\alpha + 4}$

4) $\ln\left(\frac{a}{b}\right) - \ln\left(\frac{b}{a}\right) = \ln\left(\frac{a}{b}\right) + \ln\left(\frac{a}{b}\right) = \boxed{2\ln\left(\frac{a}{b}\right)}$

5) $D = e^{-\ln x} + e^{2\ln x} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} + e^{\ln(x^2)} = \boxed{\frac{1}{x} + x^2}$

$E = e^{-\ln\left(\frac{e}{x-2}\right)} = e^{\ln\left(\frac{x-2}{e}\right)} = \boxed{\frac{x-2}{e}}$

$F = e^{\ln x - \ln(x^2)} = e^{\ln\left(\frac{x}{x^2}\right)} = e^{\ln\left(\frac{1}{x}\right)} = \boxed{\frac{1}{x}}$

Ex 2 $f(x) = \ln(e^{-x} + e^x)$

$= \ln\left(\frac{1}{e^x} + e^x\right) = \ln\left(\frac{1 + (e^x)^2}{e^x}\right)$

$= \ln(1 + e^{2x}) - \ln(e^x)$

$= \ln(1 + e^{2x}) - x$

CQFD

Ex 3 $h(x) = \ln(2e^x + 1) - x$

1) $h(x) + x = \ln(2e^x + 1)$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $2e^x > 0$ donc $2e^x + 1 > 1$

et donc $\ln(2e^x + 1) > 0$

càd $h(x) + x > 0$

2) $h(x) = \ln(2e^x + 1) - x$

$= \ln(2e^x + 1) - \ln(e^x)$

$= \ln\left(\frac{2e^x + 1}{e^x}\right) = \ln\left(2 + \frac{1}{e^x}\right) = \boxed{\ln(2 + e^{-x})}$

$\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

donc $2 + e^{-x} > 2$

donc $\ln(2 + e^{-x}) > \ln 2$

car ln strictement croissante sur $]0, +\infty[$

donc $\boxed{h(x) > \ln 2}$