ÉPREUVE D'ENSEIGNEMENT DE SPÉCIALITÉ

Mathématiques

Janvier 2022

Sujet 2

Durée de l'épreuve : **4 heures**

L'usage de la calculatrice avec mode examen actif est autorisé.

L'usage de la calculatrice sans mémoire, « type collège », est autorisé.

La qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements seront prises en compte dans l'appréciation des copies. Les traces de recherche, même incomplètes ou infructueuses seront valorisées.
Dans chaque exercice, le candidat peut admettre un résultat précédemment donné dans le texte pour aborder les questions suivantes, à condition de l'indiquer clairement sur la copie.

Le sujet est composé de 5 pages numérotées de 1/5 à 5/5 et comporte 4 exercices de 5 points chacun.

Exercice 1 — 5 points

Dans tout cet exercice, les probabilités seront arrondies, si nécessaire, à 10^{-3}.

D'après une étude, les utilisateurs réguliers de transports en commun représentent 17 % de la population française.

Parmi ces utilisateurs réguliers, 32 % sont des jeunes âgés de 18 à 24 ans. (Source : TNS-Sofres)

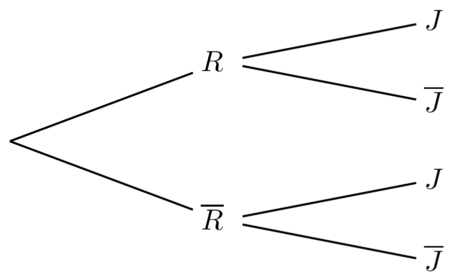
Partie A

On interroge une personne au hasard et on note :

— R l'évènement : « La personne interrogée utilise régulièrement les transports en commun ».

— J l'évènement : « La personne interrogée est âgée de 18 à 24 ans ».

1. Représentez la situation à l'aide de cet arbre pondéré, que vous recopierez sur votre copie, en y reportant les données de l'énoncé.



2. Calculer la probabilité $P(R \cap J)$.

3. D'après cette même étude, les jeunes de 18 à 24 ans représentent 11 % de la population française.

Montrer que la probabilité que la personne interrogée soit un jeune de 18 à 24 ans n'utilisant pas régulièrement les transports en commun est 0,056 à 10^{-3} près.

4. En déduire la proportion de jeunes de 18 à 24 ans parmi les utilisateurs non réguliers des transports en commun.

Partie B

Lors d'un recensement sur la population française, un recenseur interroge au hasard 50 personnes en une journée sur leur pratique des transports en commun. La population française est suffisamment importante pour assimiler ce recensement à un tirage avec remise.

Soit X la variable aléatoire dénombrant les personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées.

1. Déterminer, en justifiant, la loi de X et préciser ses paramètres.

2. Calculer $P(X = 5)$ et interpréter le résultat.

3. Le recenseur indique qu'il y a plus de 95 % de chance pour que, parmi les 50 personnes interrogées, moins de 13 d'entre elles utilisent régulièrement les transports en commun.

Cette affirmation est-elle vraie ? Justifier votre réponse.

4. Quel est le nombre moyen de personnes utilisant régulièrement les transports en commun parmi les 50 personnes interrogées ?

Exercice 2 — 5 points

Un apiculteur étudie l'évolution de sa population d'abeilles. Au début de son étude, il évalue à 10 000 le nombre de ses abeilles. Chaque année, l'apiculteur observe qu'il perd 20 % des abeilles de l'année précédente. Il achète un nombre identique de nouvelles abeilles chaque année. On notera c ce nombre exprimé en dizaines de milliers.

On note U_0 le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, de cet apiculteur au début de l'étude.

Pour tout entier naturel n non nul, U_n désigne le nombre d'abeilles, en dizaines de milliers, au bout de la n-ième année. Ainsi, on a

$$U_0 = 1 \quad \text{et, pour tout entier naturel } n,\ U_{n+1} = 0,8U_n + c.$$

Partie A

On suppose dans cette partie seulement que $c = 1$.

1. Conjecturer la monotonie et la limite de la suite (U_n).
2. Démontrer par récurrence que, pour tout entier naturel n, $U_n = 5 - 4 \times 0,8^n$.
3. a. Vérifier les deux conjectures établies à la question 1. en justifiant votre réponse.

   b. Interpréter ces deux résultats.

Partie B

L'apiculteur souhaite que le nombre d'abeilles tende vers 100 000.

On cherche à déterminer la valeur de c qui permet d'atteindre cet objectif.

On définit la suite (V_n) par, pour tout entier naturel n, $V_n = U_n - 5c$.

1. Montrer que la suite (V_n) est une suite géométrique dont on précisera la raison et le premier terme.
2. En déduire une expression du terme général de la suite (V_n) en fonction de n.
3. a. Déterminer la valeur de c pour que l'apiculteur atteigne son objectif.

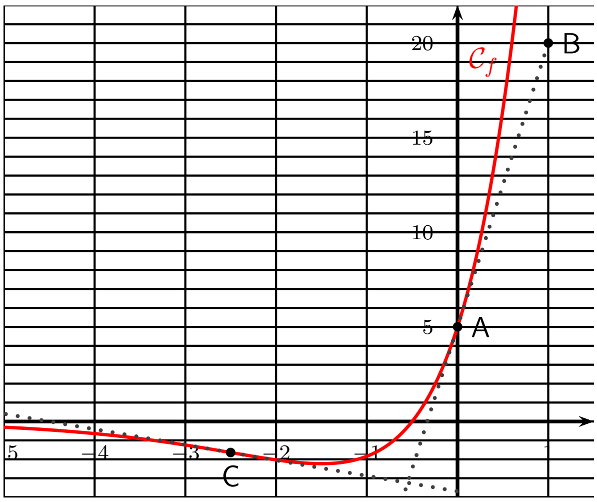
   b. Donner une interprétation de ce résultat.

Exercice 3 — 5 points

Le graphique ci-contre donne la représentation graphique $\mathcal{C}_f$ dans un repère orthogonal d'une fonction f définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

On notera f' la fonction dérivée de f.

On donne les points A de coordonnées $(0\,;\,5)$ et B de coordonnées $(1\,;\,20)$. Le point C est le point de la courbe $\mathcal{C}_f$ ayant pour abscisse $-2,5$. La droite (AB) est la tangente à la courbe $\mathcal{C}_f$ au point A.



1. Conjecturer graphiquement :

   a. les limites de f en $+\infty$ et en $-\infty$

   b. la convexité de f. Que peut-on dire du point C ?

2. On admet que pour tout réel x, $\quad f(x) = \mathrm{e}^{x}(ax+b) \quad$ où a et b sont deux nombres réels.

   a. Montrer que pour tout réel x, on a $\quad f'(x) = \mathrm{e}^{x}(ax+a+b)$

   b. Par lecture graphique, déterminer les valeurs de $f(0)$ et $f'(0)$.

   c. En déduire les valeurs de a et b.

Pour la suite, on admet que pour tout réel x, on a $\quad f(x) = (10x+5)\mathrm{e}^{x}$.

3. Etudier le sens de variation de f.

4. Les conjectures trouvées dans la question 1, concernant la convexité et les limites sont-elles vraies ?

   Justifier rigoureusement.

Exercice 4 — 5 points

Dix affirmations, réparties numérotées de **1.a** à **3.d** sont proposées ci-dessous. Le candidat **portera sur sa copie,** en regard du numéro de l'affirmation, et avec le plus grand soin, la mention VRAI ou FAUX. (aucune justification n'est attendue). Chaque réponse convenable rapporte $0,5$ point. Chaque réponse erronée enlève 0,1 point. Il n'est pas tenu compte de l'absence de réponse. Un éventuel total négatif est ramené à 0.

1. Pour tout réel x, e^x désigne l'image de x par la fonction exponentielle.

Affirmation **1.a**	Pour tous les réels a et b : $\left(\text{e}^{a+b}\right)^2 = \text{e}^{2a} \times \text{e}^{2b}$
Affirmation **1.b**	Soit la fonction f définie pour $x \neq 0$ par $f(x) = \dfrac{\text{e}^x}{x}$. La droite d'équation $y = \dfrac{-2}{\text{e}}x - \dfrac{3}{\text{e}}$ est la tangente à la courbe représentative de la fonction f au point d'abscisse -1.
Affirmation **1.c**	Soit a un réel strictement positif et la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = \dfrac{\text{e}^x + 2}{a\text{e}^x + 1}$. Il existe une valeur de a pour laquelle l'axe des abscisses est une asymptote en $+\infty$ à la courbe représentative de f.
Affirmation **1.d**	Si $\displaystyle\lim_{x\to 0} f(x) = 0$ alors $\displaystyle\lim_{x\to+\infty} f\left(\frac{x}{\text{e}^x}\right) = 0$

2.

Affirmation **2.a**	Soient les fonctions f et g définies sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -x^2 + 2x$ et $g(x) = x + 2$ alors pour tout réel x, $f \circ g(x) = -x^2 - 2x$
Affirmation **2.b**	Soit la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = -6x^2 + 6x - 5$. On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de f dans un repère du plan orthonormé. La tangente à $\mathscr{C}_f$ au point d'abscisse 0,4 est parallèle à la droite (IJ) où I(1 ; 0) et J(4 ; 3)

3. On considère deux suites (U_n) et (V_n) définies sur $\mathbb{N}$.

Affirmation **3.a**	Si $\lim U_n = +\infty$ et si $\lim V_n = -\infty$ alors $\lim (U_n + V_n) = 0$.
Affirmation **3.b**	Si (U_n) et (V_n) convergent alors la suite $\left(\dfrac{U_n}{V_n}\right)$ converge
Affirmation **3.c**	Si pour tout entier n, $U_{n+1} < U_n$ et $2 \leqslant U_n$ alors (U_n) converge
Affirmation **3.d**	Si pour tout entier n, $U_n = 1 - 2^{4n}$ alors $U_{n+1} - U_n = -17 \times 2^{4n}$