$f(x) = (x^2-3x)\,e^{-x}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

1) * Limite en $-\infty$.

$x \to -\infty$
$x^2 \to +\infty$
$-3x \to +\infty$

$\Big\}$ $\lim\limits_{x\to-\infty} x^2-3x = \boxed{+\infty}$

$\lim\limits_{x\to-\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to+\infty} e^{X} = \boxed{+\infty}$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty}$

* Limite en $+\infty$:

$x \to +\infty$.
$x^2 \to +\infty$
$-3x \to -\infty$

$\Big\}$ x^2-3x : F I

• $\lim\limits_{x\to+\infty} x^2-3x = \lim\limits_{x\to+\infty} x(x-3) = \boxed{+\infty}$

• $\lim\limits_{x\to+\infty} e^{-x} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^{X} = \boxed{0}$

donc F. I

On a : $f(x) = (x^2-3x)\,e^{-x} = \dfrac{x^2-3x}{e^x} = \dfrac{x^2}{e^x} - 3\times\dfrac{x}{e^x}$

On sait que $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{e^x}{x^n} = +\infty$ $\forall n \in \mathbb{N}$.

donc $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{x^n}{e^x} = 0$

donc $\boxed{\lim\limits_{x\to+\infty} f(x) = 0}$

2) Résoudre $f(x) = 0$ dans $\mathbb{R}$

$(x^2-3x)\,e^{-x} = 0$

$\iff x^2-3x = 0$ car $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} \neq 0$

$\iff x(x-3) = 0$

$\iff x = 0$ ou $x-3 = 0$

$\boxed{S = \{0\,;3\}}$ $\boxed{f(x) = 0 \text{ pour } x = 0 \text{ et } x = 3}$

(2)

3 a) $f'(x) = (2x-3)e^{-x} + (x^2-3x)\times e^{-x}\times(-1)$

$f'(x) = e^{-x}(2x-3-x^2+3x)$

$\boxed{f'(x) = e^{-x}(-x^2+5x-3)}$

• $\forall x \in \mathbb{R}$ $e^{-x} > 0$

• $-x^2+5x-3$ trinôme. $a = -1 < 0$

Racines ? $-x^2+5x-3 = 0$

$\Delta = 25 - 4\times3 = 25 - 12 = 13$

$x_1 = \dfrac{-b+\sqrt{\Delta}}{2a} = \dfrac{-5+\sqrt{13}}{-2} = \boxed{\dfrac{5-\sqrt{13}}{2}} \simeq 0{,}7$

$x_2 = \dfrac{-5-\sqrt{13}}{-2} = \boxed{\dfrac{5+\sqrt{13}}{2}} \simeq 4{,}3$

x	$-\infty$		α		0		x_1		3		x_2		$+\infty$
e^{-x}		+		+		+	|	+		+	|	+	
$-x^2+5x-3$		−		−		−	0	+		+	0	−	
$f'(x)$		−		−		−	0	+		+	0	−	
$f(x)$	$+\infty$	↘	2	↘	0	↘	$f(x_1)$	↗	0	↗	$f(x_2)$	↘	0

b)

x	$-\infty$		0		3		$+\infty$
$f(x)$		+	0	−	0	+	

4) Equation $f(x) = 2$ dans $]-\infty, 0]$

a) Sur $]-\infty, 0]$ • f est continue car dérivable

• f est strictement décroissante

• $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$ $f(0) = 0$ $2 \in [0, +\infty[$

D'après le corollaire du TVI, l'équation $f(x) = 2$ a une seule solution dans $]-\infty, 0]$ que l'on note α.

(3)

b) $\boxed{-0{,}4 < \alpha < -0{,}3}$

car $f(-0{,}4) > 2$ et $f(-0{,}3) < 2$

5) $g(x) = \sqrt{(x^2 - 3x)e^{-x}}$

On a $g(x) = \sqrt{f(x)}$

a) <u>Ensemble de définition de g</u>

$g(x)$ existe $\Leftrightarrow f(x) \geq 0$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty ; 0] \cup [3, +\infty[$.

b) <u>Limites de g aux bornes de son ensemble de définition</u>

- $\lim\limits_{x \to -\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to -\infty} \sqrt{f(x)} = \lim\limits_{X \to +\infty} \sqrt{X} = \boxed{+\infty}$

- $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = \lim\limits_{x \to +\infty} \sqrt{f(x)} = \lim\limits_{X \to 0} \sqrt{X} = \sqrt{0} = \boxed{0}$

c) <u>Interprétation graphique :</u> $\lim\limits_{x \to +\infty} g(x) = 0$

donc l'axe des abscisses (ou droite d'équation $y=0$) est une asymptote à $\mathcal{C}_g$ en $+\infty$.

d)

$g(x) = \sqrt{2} \Leftrightarrow f(x) = 2$

Or d'après 4a) l'équation $f(x) = 2$ a une unique solution dans $]-\infty, 0]$ qui est α.

<u>Conclusion</u> : l'équation $g(x) = \sqrt{2}$ a une unique solution dans $]-\infty, 0]$ et c'est α.