Ex 1 .... **7,5 points**

Soit f la fonction dérivable, définie sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \mathrm{e}^x + \dfrac{1}{x}$.

1. **Étude d'une fonction auxiliaire**
   - **a.** Soit la fonction g dérivable, définie sur $[0\ ;\ +\infty[$ par $g(x) = x^2\mathrm{e}^x - 1$
     Étudier le sens de variation de la fonction g.
   - **b.** Démontrer qu'il existe un unique réel a appartenant à $[0\ ;\ +\infty[$ tel que $g(a) = 0$.
     Démontrer que a appartient à l'intervalle $[0{,}703\ ;\ 0{,}704[$.
   - **c.** Déterminer le signe de $g(x)$ sur $[0\ ;\ +\infty[$.
2. **Étude de la fonction** f
   - **a.** Déterminer les limites de la fonction f en 0 et en $+\infty$.
   - **b.** On note f' la fonction dérivée de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
     Pour $x > 0$, calculer $f'(x)$ et exprimer $f'(x)$ en fonction de $g(x)$.
   - **c.** En déduire le tableau de variation de f sur l'intervalle $]0\ ;\ +\infty[$.
   - **d.** Démontrer que la fonction f admet pour minimum le nombre réel $m = \dfrac{1}{a^2} + \dfrac{1}{a}$.
   - **e.** Justifier que $3,43 < m < 3,45$.

Ex 2 .... **4 points**

Soit (u_n) la suite définie pour tout entier naturel n non nul par $\begin{cases} u_1 &= \dfrac{1}{2} \\ u_{n+1} &= \dfrac{n+1}{2n}u_n \end{cases}$

On admet que la suite (u_n) est convergente.

1. Pour tout entier naturel n non nul, on pose $v_n = \dfrac{u_n}{n}$
   - **a.** Démontrer que la suite (v_n) est géométrique. On précisera sa raison et son premier terme v_1.
   - **b.** En déduire que, pour tout entier naturel n non nul, $u_n = \dfrac{n}{2^n}$.
2. Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 2$.
   - **a.** Déterminer la limite de f en $+\infty$.
   - **b.** En déduire la limite de la suite (u_n).

Ex 3 .... **3 points**

1. Préciser l'ensemble de définition puis résoudre $(x-2)\ln(x+1) \geqslant 0$
2. Préciser l'ensemble de définition puis résoudre $\ln(x+2) - \ln(4-x) = 3$

Ex 4 .... **5,5 points**

Soit $f(x) = \dfrac{(\ln x)^2}{\ln x - 1}$

1. Déterminer l'ensemble de définition de f que l'on note $\mathscr{D}_f$.
2. Résoudre $f(x) = 4$
3. Montrer que pour tous x de $\mathscr{D}_f$, $f\left(\dfrac{1}{x}\right)$ s'écrit sous la forme $\dfrac{a(\ln x)^2}{b\ln x + c}$ avec a, b et c <u>nombres entiers relatifs</u> à déterminer.
4. Montrer que pour tous x de $\mathscr{D}_f$, $f\left(\sqrt{x}\right)$ s'écrit sous la forme $\dfrac{a(\ln x)^2}{b\ln x + c}$ avec a, b et c <u>nombres entiers relatifs</u> à déterminer.
5. Démontrer que $f'(x) = \dfrac{\ln x}{x} \times \dfrac{\ln x - 2}{(\ln x - 1)^2}$ où f' est la dérivée de f.
6. Calculer $f'\left(\mathrm{e}^{-2}\right)$