DS : Fonction ln

Calculatrice autorisée

Exercice 1

1. Préciser l'ensemble de définition puis résoudre $\dfrac{\ln(x-3)}{\ln x - 2} \geqslant 0$

2. Préciser l'ensemble de définition puis résoudre $2(\ln x)^2 - \ln x = 1$

Exercice 2

Soit la suite (u_n) définie pour tout entier naturel n non nul, par $u_n = \dfrac{n}{3^n}$.

On admet que la suite (u_n) converge.

Soit la fonction f définie sur l'intervalle $[1\ ;\ +\infty[$ par $f(x) = \ln x - x\ln 3$.

1. Déterminer la limite de f en $+\infty$.

2. En déduire la limite de la suite (u_n).

Exercice 3

On considère la fonction f définie sur $\mathbb{R}$ par : $f(x) = x^2 e^{x-1} - \dfrac{x^2}{2}$

On note $\mathscr{C}_f$ la courbe représentative de la fonction f dans un repère orthonormal $\left(O,\ \vec{i},\ \vec{j}\right)$.

1. Calculer $f'(x)$ pour tout réel x, et démontrer que $f'(x) = xg(x)$ avec $g(x) = (x+2)e^{x-1} - 1$.

2. Etude du signe de $g(x)$ pour x réel.

a. Etudier le sens de variation de la fonction g, puis dresser son tableau de variations.

On admet que $\lim\limits_{x\to-\infty} g(x) = -1$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x) = +\infty$

b. Montrer que l'équation $g(x) = 0$ possède une unique solution notée α dans $\mathbb{R}$ puis justifier que $0,20 < \alpha < 0,21$.

c. Déterminer le signe de $g(x)$ suivant les valeurs de x.

3. Sens de variations de la fonction f sur $\mathbb{R}$.

a. Etudier, suivant les valeurs de x, le signe de $f'(x)$.

b. En déduire le sens de variations de la fonction f.

4. Encadrement de $f(\alpha)$.

a. Montrer que $f(\alpha) = \dfrac{-\alpha^3}{2(\alpha+2)}$.

b. On considère la fonction h définie sur l'intervalle $[0\ ;\ 1]$ par $h(x) = \dfrac{-x^3}{2(x+2)}$.

On admet que h est strictement décroissante sur $[0\ ;\ 1]$.

En déduire un encadrement de $f(\alpha)$.