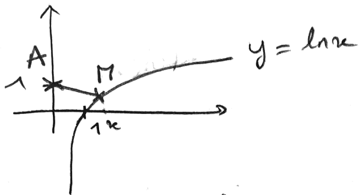
DM

Ex 1

Partie A

1)



2) $x>0$ $\quad M(x, \ln x)$ $\quad A(0,1)$

$AM = \sqrt{(x-0)^2+(\ln x-1)^2} = \sqrt{x^2+(\ln x-1)^2}$

3) $f(x) = x^2+(\ln x-1)^2$

a) $f'(x) = 2x + 2(\ln x - 1)\times \frac{1}{x}$

$f'(x) = \frac{2x^2+2(\ln x-1)}{x} = \frac{2g(x)}{x}$.

$x>0$ donc $f'(x)$ a le même signe que $g(x)$

$g(x) = x^2+\ln x-1$

b) $g'(x) = 2x+\frac{1}{x} > 0$

donc g croissante sur $]0,+\infty[$

$g(1) = 1+\ln 1 - 1 = 0$

donc

x	0		1		$+\infty$
$g(x)$		$-$	0	$+$	

donc

x	0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$	2	$\nearrow$	

$f(1) = 1+(0-1)^2$

$f(1) = 2$

4) $AM = \sqrt{f(x)}$

donc AM minimale $\iff f(x)$ est minimale

$\iff x = 1$

Donc le point de $\mathcal{C}$ le plus proche de A est $(1, \ln 1)$

donc $(1, 0)$

(2)

Partie B

$a_1 = \frac{1}{3}$ $\quad b_1 = \frac{2}{3}$ $\quad \forall n \geq 1$ $\quad a_{n+1} = \frac{1}{3}a_n$

$b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n$

1) a) (a_n) est géométrique de raison $\frac{1}{3}$

$\forall n\geq 1$ $\quad a_n = a_1\times q^{n-1} = \frac{1}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^{n-1} = \boxed{\left(\frac{1}{3}\right)^n}$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n = 0$ car $-1<\frac{1}{3}<1$

2) Démontrons que pour tout $n\geq 1$, $b_n = \frac{2n}{3^n}$.

* Pour $n=1$ $\quad b_1 = \frac{2}{3}$

$\frac{2\times 1}{3^1} = \frac{2}{3}$ donc vrai pour $n=1$

* Soit $n\geq 1$ tel que $b_n = \frac{2n}{3^n}$

Démontrons que $b_{n+1} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$

On a $b_{n+1} = \frac{2}{3}a_n + \frac{1}{3}b_n = \frac{2}{3}\times\left(\frac{1}{3}\right)^n + \frac{1}{3}\times\frac{2n}{3^n}$

$b_{n+1} = \frac{2}{3^{n+1}} + \frac{2n}{3^{n+1}} = \frac{2+2n}{3^{n+1}} = \frac{2(n+1)}{3^{n+1}}$

CQFD

* Conclusion :

D'après le principe de raisonnement par récurrence pour tout $n\geq 1$ $\quad b_n = \frac{2n}{3^n}$

3) $U_n = \frac{n}{3^n}$ et $V_n = \ln(U_n)$

a) $V_n = \ln\left(\frac{n}{3^n}\right) = \ln n - \ln(3^n) = \ln n - n\ln 3$

$V_n = n\left(\frac{\ln n}{n} - \ln 3\right)$

b) $\lim\limits_{n\to+\infty} V_n = +\infty(0-\ln 3) = \boxed{-\infty}$ car $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{\ln n}{n} = 0$ et $\ln 3>0$.

$\lim\limits_{n\to+\infty} U_n = \lim\limits_{n\to+\infty} e^{V_n} = \lim\limits_{X\to-\infty} e^X = \boxed{0}$

c) $\lim\limits_{n\to+\infty} b_n = \lim\limits_{n\to+\infty} 2U_n = 2\times 0 = \boxed{0}$