Exercice 1 Les parties A et B sont indépendantes.

Partie A

Dans un repère orthonormé, on considère la courbe représentative $\mathscr{C}$ de la fonction ln, et le point $A(0\,;\,1)$. Le but de cette partie est de déterminer le point de $\mathscr{C}$ le plus proche du point A.

1. Représenter la courbe $\mathscr{C}$ et le point A.

2. Soit x un réel strictement positif et M le point d'abscisse x de la courbe $\mathscr{C}$. Déterminer la distance AM

3. Soit la fonction f définie sur $]0;+\infty[$ par $f(x)=x^2+(\ln x-1)^2$.

- **a.** Calculer $f'(x)$ et démontrer que pour tout réel $x>0$, $f'(x)$ a le même signe que $g(x)=x^2+\ln x-1$.
- **b.** Déterminer les variations de g, calculer $g(1)$ et en déduire les variations de f.

4. Conclure.

Partie B

On définit les deux suites (a_n) et (b_n) par $a_1=\dfrac{1}{3}$, $b_1=\dfrac{2}{3}$ et , pour tout entier naturel n non nul $a_{n+1}=\dfrac{1}{3}a_n$ et $b_{n+1}=\dfrac{2}{3}a_n+\dfrac{1}{3}b_n$.

1. **a.** Quelle est la nature de la suite (a_n) ? Exprimer a_n en fonction de n.

- **b.** Déterminer la limite de la suite (a_n).

2. Démontrer par récurrence que, pour tout $n\in\mathbb{N}^*$, $b_n=\dfrac{2n}{3^n}$

3. On pose $u_n=\dfrac{n}{3^n}$ et $v_n=\ln(u_n)$.

- **a.** Montrer que $v_n=n\left(\dfrac{\ln n}{n}-\ln 3\right)$
- **b.** Calculer la limite de (v_n) puis celle de (u_n).
- **c.** En déduire la limite de (b_n).