

Calculatrice autorisée

Exercice 1**4 points**

Soit l'équation différentielle (E) : $y' + 2y = xe^{-3x}$.

1. Résoudre l'équation différentielle (E') : $y' + 2y = 0$.
2. Déterminer les réels a et b tels que la fonction g définie sur \mathbb{R} par $g(x) = (ax + b)e^{-3x}$ soit une solution particulière de (E).
3. En déduire les solutions de (E).

Exercice 2**3 points**

On a étudié en laboratoire l'évolution d'une population de petits rongeurs. La taille de la population, au temps t , est notée $g(t)$.

On définit ainsi une fonction g de l'intervalle $[0 ; +\infty[$ dans \mathbb{R} . La variable réelle t désigne le temps, exprimé en années.

L'unité choisie pour $g(t)$ est la centaine d'individus.

Le modèle utilisé pour décrire cette évolution consiste à prendre pour g une solution, sur l'intervalle $[0 ; +\infty[$, de l'équation différentielle :

$$(E_1) \quad y' = \frac{y}{4}$$

1. Résoudre l'équation différentielle (E₁).
2. Déterminer l'expression de $g(t)$ lorsque, à la date $t = 0$, la population comprend 200 rongeurs, c'est-à-dire $g(0) = 2$.
3. Après combien d'années la population dépassera-t-elle 400 rongeurs pour la première fois ?

Exercice 3**3,5 points**

Indiquer si la proposition suivante est vraie ou fausse et donner une justification de la réponse choisie.

Soit f la fonction solution sur \mathbb{R} de l'équation différentielle $y' = -y + 2$ telle que $f(\ln 2) = 1$.

Proposition : « La courbe représentative de f admet au point d'abscisse 0, une tangente d'équation $y = -2x + 2$ ».

Exercice 4**5,5 points**

On se propose de déterminer toutes les fonctions f définies et dérivables sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ vérifiant l'équation différentielle

$$(E) : \quad xy' - (2x + 1)y = 8x^2$$

1. Démontrer que si f est solution de (E) alors la fonction g définie sur l'intervalle $]0 ; +\infty[$ par $g(x) = \frac{f(x)}{x}$ est solution de l'équation différentielle (E') : $y' = 2y + 8$.
2. On admet que si h est solution de (E') alors la fonction f définie par $f(x) = xh(x)$ est solution de (E).
Résoudre (E') et en déduire toutes les solutions de (E)
3. Existe-t-il une fonction f solution de l'équation différentielle (E) dont la représentation graphique dans un repère donné passe par le point $A(\ln 2 ; 0)$? Si oui la préciser.