Ex 1

1) $y' + 2y = 0$

$y' = -2y$ Solutions : $f(x) = ke^{-2x}$, $k \in \mathbb{R}$

2) $g(x) = (ax+b)e^{-3x}$

g solution de $y' + 2y = xe^{-3x}$

donc $g'(x) + 2g(x) = xe^{-3x}$

$ae^{-3x} + (ax+b) \times e^{-3x} \times (-3) + 2(ax+b)e^{-3x} = xe^{-3x}$

$e^{-3x}(a - 3(ax+b) + 2(ax+b)) = xe^{-3x}$

$e^{-3x}(a - 3ax - 3b + 2ax + 2b) = xe^{-3x}$

$e^{-3x}(-ax + a - b) = xe^{-3x}$

$\begin{cases} -a = 1 \\ a - b = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} a = -1 \\ b = -1 \end{cases}$

donc $g(x) = (-x-1)e^{-3x}$

3) les solutions de $y' + 2y = xe^{-3x}$ sont donc :

$f(x) = ke^{-2x} + (-x-1)e^{-3x}$

$\boxed{f(x) = ke^{-2x} - (x+1)e^{-3x}}$ $k \in \mathbb{R}$

Ex 2 t en années. $g(t)$ en centaines d'individus

1) $y' = \frac{y}{4} \iff y' = \frac{1}{4}y$

Solutions : $\boxed{f(x) = ke^{\frac{1}{4}t} \quad k \in \mathbb{R}}$

2) $g(0) = 2$ donc $g(x) = ke^{\frac{1}{4}t}$

$g(0) = 2$ donc $ke^{0} = 2$ càd $k = 2$

donc $\boxed{g(t) = 2e^{\frac{1}{4}t}}$

3) Résoudre $g(t) > 4$

$2e^{\frac{1}{4}t} > 4$

$e^{\frac{1}{4}t} > 2$) ln ↗ sur $]0,+\infty[$

$\frac{1}{4}t > \ln 2$

$t > 4\ln 2$

$\simeq 2,8$

Donc après 3 ans

(après 2 ans et 10 mois)

Ex 3

$y' = -y + 2$ $f(\ln 2) = 1$

$f(x) = ke^{-x} - \frac{2}{-1}$

$f(x) = ke^{-x} + 2$ avec $k \in \mathbb{R}$

$f(\ln 2) = 1$ donc $ke^{-\ln 2} + 2 = 1$

$ke^{\ln(\frac{1}{2})} = -1$

$k \times \frac{1}{2} = -1$ $\boxed{k = -2}$

donc $\boxed{f(x) = -2e^{-x} + 2}$

Equation de la tangente au point d'abscisse 0

$y = f'(0)(x-0) + f(0)$

$y = f'(0)x + f(0)$

$\boxed{y = 2x}$

$f(0) = -2e^{0} + 2 = \boxed{0}$

$f'(0) = -f(0) + 2$

$= \boxed{2}$

donc $\boxed{\text{Faux}}$

Ex 4 $\quad xy' - (2x+1)y = 8x^2$

1) Soit f solution donc $\quad x f'(x) - (2x+1) f(x) = 8x^2$

$$\downarrow$$

$$x f'(x) = 8x^2 + (2x+1) f(x)$$

$g(x) = \dfrac{f(x)}{x}$

$$g'(x) = \frac{f'(x) \times x - f(x)}{x^2}$$

$$= \frac{8x^2 + (2x+1) f(x) - f(x)}{x^2}$$

$$= \frac{8x^2 + 2x f(x)}{x^2} = \frac{8x^2}{x^2} + \frac{2x f(x)}{x^2}$$

$$= 8 + 2\frac{f(x)}{x}$$

$$= 8 + 2g(x)$$

donc $g'(x) = 2g(x) + 8$

donc g solution de $y' = 2y + 8$

2) $y' = 2y + 8$

Solutions $\quad f(x) = ke^{2x} - \dfrac{8}{2}$

$$\boxed{f(x) = ke^{2x} - 4} \quad k \in \mathbb{R}$$

Or si h solution de $y' = 2y + 8$

alors f avec $f(x) = x\,h(x)$ est solution de (E)

Donc les solutions de (E) sont :

$$f(x) = x(ke^{2x} - 4)$$

$$\boxed{f(x) = kxe^{2x} - 4x} \quad k \in \mathbb{R}.$$

3) On cherche s'il existe k tel que $f(\ln 2) = 0$.

$$f(\ln 2) = k \ln 2\, e^{2\ln 2} - 4\ln 2$$

$$= k \ln 2\, e^{\ln 4} - 4\ln 2$$

$$= 4k \ln 2 - 4\ln 2$$

$f(\ln 2) = 0 \iff 4k\ln 2 - 4\ln 2 = 0$

$\iff 4k\ln 2 = 4\ln 2$

$\iff k = 1$

donc $\boxed{f(x) = xe^{2x} - 4x}$ est la solution qui convient.