

Révision Bac 2022 $F = \ln$

Sur $]0, 1[$ $f(x) = x(1 - \ln x)^2$ $(uv^2)' = u'v^2 + u \times 2v \times v'$

1) a) $f'(x) = 1 \times (1 - \ln x)^2 + x \times 2(1 - \ln x) \times \frac{-1}{x}$
 $= (1 - \ln x)^2 - 2(1 - \ln x)$
 $= (1 - \ln x)(1 - \ln x - 2)$
 $= (1 - \ln x)(-\ln x - 1)$
 $= (1 - \ln x)(-1) \times (\ln x + 1)$
 $= (-1 + \ln x) \times (\ln x + 1)$

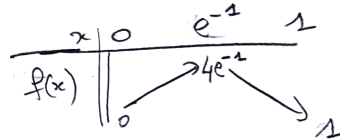
$f'(x) = (\ln x - 1)(\ln x + 1)$

b) Signe de $f'(x)$ sur $]0, 1[$: Tableau de signe car signe d'un produit.

$\ln x - 1 > 0$	$\ln x + 1 > 0$
$\Leftrightarrow \ln x > 1$	$\Leftrightarrow \ln x > -1$
$\Leftrightarrow x > e$	$\Leftrightarrow x > e^{-1}$

Rmq: $e > 1$ $e^{-1} = \frac{1}{e} \in]0, 1[$

x	0	e^{-1}	1
$\ln x - 1$	-	-	-
$\ln x + 1$	-	0	+
$f'(x)$	+	0	-



2) Sur $]0, 1[$ $g(x) = \ln x$, $a \in]0, 1[$ $G_g = \mathbb{T}$
 $\Gamma_a \in \mathbb{T}$, $\Gamma_a(a, g(a))$ $a = 0,2$
 $\Gamma_a(a, \ln a)$

a) Aire $(ON_{0,2} P_{0,2}) = \frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2} \approx \frac{0,5 \times 2,5}{2}$

b) Equation de la tangente $\approx 0,625$ Unités d'aire

$y = g'(0,2)(x - 0,2) + g(0,2)$ $g(0,2) = \ln(0,2)$
 $y = \frac{1}{0,2}(x - 0,2) + \ln(0,2)$ $g'(x) = \frac{1}{x}$
 $y = 5(x - 0,2) + \ln(0,2)$ $g'(0,2) = \frac{1}{0,2}$
 $y = 5x - 1 + \ln(0,2)$

c) $y = 5x - 1 + \ln(0,2)$ Rmq: $\ln(0,2) = \ln(\frac{2}{10})$
 $y = 5x - 1 - \ln 5$ $= \ln(\frac{1}{5})$
 $= -\ln 5$

Coordonnées de $N_{0,2}$ et $P_{0,2}$

Pour $N_{0,2}$: $y = 0$ donc $5x - 1 - \ln 5 = 0$
 $x = \frac{1 + \ln 5}{5}$

Pour $P_{0,2}$: $x = 0$ donc $y = -1 - \ln 5$ ou $y = -(1 + \ln 5)$

donc $ON_{0,2} = \frac{1 + \ln 5}{5}$ et $OP_{0,2} = 1 + \ln 5$ Δ

donc l'aire du triangle $ON_{0,2} P_{0,2}$ est

$\frac{ON_{0,2} \times OP_{0,2}}{2} = \frac{1}{2} \times \frac{1 + \ln 5}{5} \times (1 + \ln 5)$
 $= \frac{(1 + \ln 5)^2}{10} \approx 0,68$

3) $A(a) = \frac{1}{2} a (1 - \ln a)^2$

On remarque que $A(a) = \frac{1}{2} f(a)$

donc $A(a)$ est maximale quand $f(a)$ est maximale

donc pour $a = \frac{1}{e}$

Aire max = $A(\frac{1}{e}) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{e} (1 - \ln(\frac{1}{e}))^2$
 $= \frac{1}{2e} (1 + \ln e)^2$
 $= \frac{1}{2e} (2)^2 = \span style="border: 1px solid black; padding: 2px; margin-left: 20px;"> $\frac{2}{e}$$