

Le plan est muni d'un repère orthogonal (O, I, J) .

1. On considère la fonction f définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $f(x) = x(1 - \ln x)^2$.

- Déterminer une expression de la fonction dérivée de f et vérifier que pour tout $x \in]0; 1]$, $f'(x) = (\ln x + 1)(\ln x - 1)$.
- Étudier les variations de la fonction f et dresser son tableau de variations sur l'intervalle $]0; 1]$ (on admettra que la limite de la fonction f en 0 est nulle).

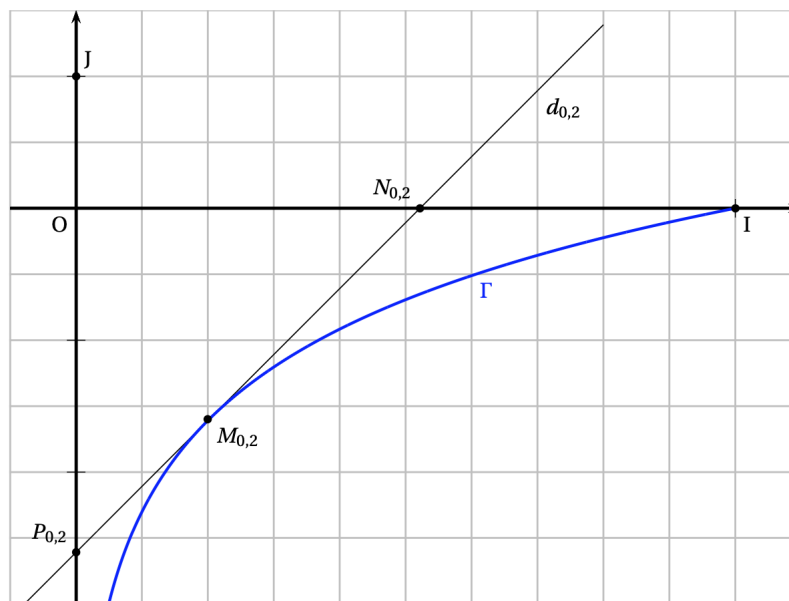
On note Γ la courbe représentative de la fonction g définie sur l'intervalle $]0; 1]$ par $g(x) = \ln x$.

Soit a un réel de l'intervalle $]0; 1]$. On note M_a le point de la courbe Γ d'abscisse a et d_a la tangente à la courbe Γ au point M_a .

Cette droite d_a coupe l'axe des abscisses au point N_a et l'axe des ordonnées au point P_a .

On s'intéresse à l'aire du triangle ON_aP_a quand le réel a varie dans l'intervalle $]0; 1]$.

2. Dans cette question, on étudie le cas particulier où $a = 0,2$ et on donne la figure ci-dessous.



- Déterminer graphiquement une estimation de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$ en unités d'aire.
- Déterminer une équation de la tangente $d_{0,2}$.
- Calculer la valeur exacte de l'aire du triangle $ON_{0,2}P_{0,2}$.

Dans ce qui suit, on admet que, pour tout réel a de l'intervalle $]0; 1]$, l'aire du triangle ON_aP_a en unités d'aire est donnée par $\mathcal{A}(a) = \frac{1}{2}a(1 - \ln a)^2$.

3. À l'aide des questions précédentes, déterminer pour quelle valeur de a l'aire $\mathcal{A}(a)$ est maximale.

Déterminer cette aire maximale.