

Une plateforme informatique propose deux types de jeux vidéo : un jeu de type A et un jeu de type B .

On admet que, dès que le joueur achève une partie, la plateforme lui propose une nouvelle partie selon le modèle suivant :

- si le joueur achève une partie de type A , la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type A avec une probabilité de $0,8$;
- si le joueur achève une partie de type B , la plateforme lui propose de jouer à nouveau une partie de type B avec une probabilité de $0,7$.

Pour un entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on note A_n et B_n les évènements :

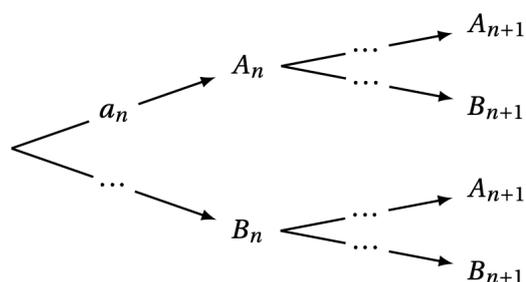
A_n : «la n -ième partie est une partie de type A .»

B_n : «la n -ième partie est une partie de type B .»

Pour tout entier naturel n supérieur ou égal à 1 , on note a_n la probabilité de l'évènement A_n .

1. a. Recopier et compléter l'arbre pondéré ci contre.
- b. Montrer que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$



Dans la suite de l'exercice, on note a la probabilité que le joueur joue au jeu A lors de sa première partie, où a est un nombre réel appartenant à l'intervalle $[0 ; 1]$. La suite (a_n) est donc définie par : $a_1 = a$, et pour tout entier naturel $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = 0,5a_n + 0,3$$

2. **Étude d'un cas particulier.** Dans cette question, on suppose que $a = 0,5$.
 - a. Montrer par récurrence, que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a : $0 \leq a_n \leq 0,6$.
 - b. Montrer que la suite (a_n) est croissante.
 - c. Montrer que la suite (a_n) est convergente et préciser sa limite.

3. **Étude du cas général.** Dans cette question, le réel a appartient à l'intervalle $[0 ; 1]$.

On considère la suite (u_n) définie pour tout entier naturel $n \geq 1$ par

$$u_n = a_n - 0,6$$

- a. Montrer que la suite (u_n) est une suite géométrique.
- b. En déduire que pour tout entier naturel $n \geq 1$, on a :

$$a_n = (a - 0,6) \times 0,5^{n-1} + 0,6$$

- c. Déterminer la limite de la suite (a_n) . Cette limite dépend-elle de la valeur de a ?
- d. La plateforme diffuse une publicité insérée en début des parties de type A et une autre insérée en début des parties de type B . Quelle devrait-être la publicité la plus vue par un joueur s'adonnant intensivement aux jeux vidéo ?